l'Hôpital の定理とその注意点（解析学 A）

（担当：高橋淳也）

1　l'Hôpital の定理とその注意点

1.1　l'Hôpital の定理

l'Hôpital（ロピタル，l'Hospital とも綴る）の定理は，不定形の極限を求める際に良く用いられるが，定理を使う際には，仮定をすべて満たしているかどうか確認する必要がある．実際，仮定を 1 つでも満たさない場合，l'Hôpital の定理が成立しない例があるので（後述 §1.2），注意が必要である．

まず，l'Hôpital の定理の主張を確認しておく．

定理 1.1 (l'Hôpital の定理 ($\frac{0}{0}$ 形))**.** 関数 f, g は開区間 $I = (a, b)$ 上で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ とする．さらに，$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$ を満たすとする．このとき，極限

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad (\alpha = \pm\infty \text{ でもよい})$$

が 存在すれば，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

である．

定理 1.2 (l'Hôpital の定理 ($\frac{\infty}{\infty}$ 形))**.** 関数 f, g は開区間 $I = (a, b)$ 上で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ とする．さらに，$\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ であるとする．このとき，極限

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \quad (\alpha = \pm\infty \text{ でもよい})$$

が 存在すれば，

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

である．

注意 1.3. (1)　仮定 $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ は，Cauchy の平均値の定理で分母 $\neq 0$ を保証するための条件である．l'Hôpital の定理は Cauchy の平均値の定理から従うので，この仮定 $g'(x) \neq 0$ は必要である．実際，この仮定 $g'(x) \neq 0$ が満たされない時，l'Hôpital の定理が成立しないような例がある（ §1.2 例 (3) を参照せよ）．

(2)　上の定理では $x \to a+0$ の場合しか記していないが，$x \to a-0$ や $x \to \pm\infty$ の場合も同様に成立する．例えば，$x \to \infty$ の場合は，$t = \frac{1}{x}$ と変数を置き換えれば，$t \to +0$ の場合に帰着出来る．

(3)　$\frac{\infty}{\infty}$ 形の場合（定理 1.2）には，分子の仮定 $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$ が必要無いことが分かる（[Miz98], p.62, 定理 3.13, [Sai13], p.35, 命題 1.4.7 を参照）．

1.2　l'Hôpital の定理の注意点

l'Hôpital の定理の仮定が 1 つでも満たさない場合，l'Hôpital の定理が成立しないことを，以下の反例で見てみよう．

例 1.4 (l'Hôpital の定理の注意点)．(1)　**不定形 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$ で無い場合**

簡単な例として，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{x}$ がある（これは，不定形ではない）．実際，$f(x) := \cos x$，$g(x) := x$ とおくと，分母と分子をそれぞれ微分した極限は

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{(\cos x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{-\sin x}{1} = 0$$

であるが，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x = 1$ なので，

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{x} = \infty$$

となり一致しない．

(2)　**極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しない場合**

極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しない場合には，一般に結論 $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ は成立しないので注意が必要である（これを確かめていない不備な答案が多い）．

例えば，

$$f(x) := x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad g(x) := x$$

のときを考えよう．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x) = \lim_{x\to+0}g(x) = 0$ より $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形である．それぞれ微分すると $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$，$g'(x) = 1$ なので，

$$\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1} = \lim_{x\to+0}\left\{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{振動}}\right\}$$

となり，第 2 項は振動するので，この極限は存在しない．

しかし，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right| = |x|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x| \longrightarrow 0 \quad (x\to+0)$$

なので，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ が存在する．

従って，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在しない時には，l'Hôpital の定理は成立しない．

(3) 仮定 $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$ を満たさない場合

この場合は非常に微妙であるが，次の様な例が知られている．なお，この仮定が抜けている間違った本もあるので，注意が必要である.（詳しくは，野村 [Nom13], p.69, §4.8, 例 4.49 あるいは，[Nom15], pp.43–47 を参照）.

$$f(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x), \quad g(x) := f(x)e^{\sin x}$$

のとき，極限 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ を考えよう．

まず，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)e^{\sin x} = \infty$ より，$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形である．

また，分母と分子の関数をそれぞれ微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \cos^2(x), \\ g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x = \cos^2(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x}\cos x \\ &= \cos x \left\{\cos(x)e^{\sin x} + g(x)\right\} \end{aligned}$$

なので，$\cos x$ の零点からなる増加列 $\left\{x_n := \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$g'(x_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots,)$ である.（幾らでも大きい x に対しても，l'Hôpital の定理の仮定 $g'(x) \neq 0$ が満たされることが無い.）

しかし，分母と分子をそれぞれ微分した式の極限は，$g'(x) = 0$ の零点を与える因子 $\cos x$ が約分されて消え，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2(x)}{\cos x\left\{\cos(x)e^{\sin x} + g(x)\right\}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{\cos(x)e^{\sin x} + g(x)}.$$

ここで，$\cos x$, $\sin x \geq -1$ と仮定 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ より，$\cos(x)e^{\sin x} + g(x) \geq -e^{-1} + g(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ となるので，

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq \frac{1}{|\cos(x)e^{\sin x} + g(x)|} \leq \frac{1}{-e^{-1} + g(x)} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

よって，$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ である．しかし，極限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x)e^{\sin x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\sin x}$$

は振動して存在しない.

1.3 l'Hôpital の定理の証明

定理 1.1 の証明. $x = a$ での値を，$f(a) = g(a) = 0$ と定義すると，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0$ なので，$f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, a+\delta]$ $(\delta > 0)$ で連続となる．また，$f(x), g(x)$ は開区間 $(a, a+\delta)$ で微分可能であり，仮定 $g'(x) \neq 0$ $(\in x \in (a, a+\delta))$ を満たす.

よって，Cauchy の平均値の定理より，ある $\xi \in (a,x)$ が存在して，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

ここで，$x \to a+0$ とすると，必然的に $\xi \to a+0$ $(a < \xi < x)$ となるので，仮定より，

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \alpha\,.$$

となり，結論が従う． □

次に，定理 1.2（$\frac{\infty}{\infty}$ 形の場合）の証明を行うが，この場合は ε–δ 論法の込み入った議論が必要となる．

定理 1.2 の証明． $a < x_1 (< b)$ となる a に十分近い x_1 を 1 つ取って固定し，次に $a < x < x_1$ となる任意の x について考える．

$g'(x) \neq 0$ なので，開区間 (x, x_1) に Cauchy の平均値の定理を適用すれば，ある $\xi \in (x, x_1)$ が存在して，

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となる．

仮定 $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$ より，$g(x) \neq 0$ なので，上の式は次のように変形できる：

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)},$$

すなわち，

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \left\{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right\} \\ &= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_1)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{g(x_1)}{g(x)}.\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

(I) 極限 $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$ が有限値の場合を考える．

この極限が有限値なので，とくに，$x \in (a, a+\delta)$ において有界である．すなわち，ある定数 $M > 0$ が存在して，すべての $x \in (a, a+\delta)$ に対して，

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq M. \tag{1.3.2}$$

任意に $\varepsilon > 0$ を取る．$\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$ なので，ある $\delta_1 > 0$ が存在して，

$$0 < x - a < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha\right| < \varepsilon\,.$$

特に，x_1 を $a < x_1 < a+\delta_1$ ととれば，$0 < \xi - a < x_1 - a < \delta_1$ なので

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \alpha\right| < \varepsilon \tag{1.3.3}$$

が成立する（大小関係： $a < x < \xi < x_1 < a+\delta_1$ である）．

次に，x_1 を固定させて $x \to a+0$ とすると，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ なので，

$$\frac{f(x_1)}{g(x)}, \quad \frac{g(x_1)}{g(x)} \longrightarrow 0$$

となる．これに，有界性 (1.3.2) と合わせれば，ある $\delta_2 > 0$ が存在して，$0 < x - a < \delta_2$ であれば，

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_1)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{g(x_1)}{g(x)}\right| &\leq \left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \cdot \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| \\ &< \varepsilon + M\varepsilon = (1+M)\varepsilon\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

となる．

ゆえに，(1.3.1) に (1.3.3) と (1.3.4) を適用すれば，$0 < x - a < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ のとき，

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| &\leq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \alpha\right| + \left|\frac{f(x_1)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{g(x_1)}{g(x)}\right| \\ &< \varepsilon + (1+M)\varepsilon = (2+M)\varepsilon\end{aligned}$$

となるので，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ が示せた．

(II) 次に $\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha = \infty$ の場合を考える（$-\infty$ の場合も同様）．

任意の十分大きな $L > 0$ に対して，ある $\delta_3 > 0$ が存在して，

$$0 < x - a < \delta_3 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq L.$$

とくに，x_1 を $a < x_1 < a+\delta_3$ ととれば，$0 < \xi - a < x_1 - a < \delta_3$ なので

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq L \tag{1.3.5}$$

が成立する．

次に，x_1 を固定して $x \to a+0$ とすると，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$ なので，

$$\frac{f(x_1)}{g(x)}, \quad \frac{g(x_1)}{g(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \to a+0)$$

となる．とくに，ある $\delta_4 > 0$ が存在して，$0 < x - a < \delta_4$ のとき，

$$\frac{f(x_1)}{g(x)} \geq -\frac{1}{2}, \qquad 1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \tag{1.3.6}$$

とできる．

ゆえに，$0 < x - a < \min\{\delta_3, \delta_4\}$ のとき，(1.3.1) の第 1 式に (1.3.5), (1.3.6) を用いれば，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \left\{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right\} \geq -\frac{1}{2} + L \cdot \frac{1}{2} = \frac{L-1}{2}$$

となるので，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ が示された． □

参考文献

[Miz98] 溝口宣夫 他, 理工系の微分・積分, 学術図書出版社，(1998).

[Nom13] 野村隆昭，微分積分学講義，共立出版，(2013).

[Nom15] 野村隆昭，微積は計算だけ？，数学セミナー 2015 年 6 月号，日本評論社 (2015), 43–47.

[Sai13] 斎藤毅，微積分，東京大学出版会，(2013).