無限大に発散する数列（解析学 A）

（担当：高橋淳也）

1　無限大に発散する数列のオーダーの比較

無限大に発散する数列の “発散のスピード”（オーダー）を比較してみよう．まず，次の事実は大変重要である．

定理 1.1.　(1)　すべての実数 $a > 1$ と自然数 k に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

(2)　すべての実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

証明. (1)　今，自然数 $k \in \mathbb{N}$ は固定されているので，$n \geq k+1$ となる自然数 $n \in \mathbb{N}$ について考える．条件 $a > 1$ より，$a = 1 + h$ $(h > 0)$ と書ける（$h > 0$ が重要！）．両辺 n 乗して 2 項展開すると，

$$\begin{aligned} a^n = (1+h)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i h^i = 1 + nh + \cdots + {}_nC_{k+1} h^{k+1} + \cdots + h^n \\ &\geq {}_nC_{k+1} h^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} h^{k+1} \end{aligned}$$

である（ここで，${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である）．よって，

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(1+h)^n} &\leq \frac{n^k (k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}} \\ &= \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \cdot \frac{1}{n \cdot (1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

（最後の等式は，分母・分子を n^k で割った）．ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ が分かる．

(2)　$a \in \mathbb{R}$ は n に依らない定数なので，

$$|a| < n_a$$

となる自然数 $n_a \in \mathbb{N}$ がとれる（例えば，$n_a = [\,|a|\,] + 1$ と取る．ただし，[　] は整数部分を表す）．このとき，任意の $n \geq n_a$ に対して，

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{a^n}{n!}\right| &= \frac{|a|\cdot|a|\cdots|a|}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{|a|}{n}\cdot\frac{|a|}{n-1}\cdots\frac{|a|}{n_a}\cdot\frac{|a|}{n_a-1}\cdots\frac{|a|}{2}\cdot\frac{|a|}{1} \\ &\leq \left(\frac{|a|}{n_a}\right)^{n-n_a+1} \cdot \underbrace{\frac{|a|}{n_a-1}\cdots\frac{|a|}{2}\cdot\frac{|a|}{1}}_{C_a:\ a\ \text{のみで決まる定数}} = \left(\frac{|a|}{n_a}\right)^{n-n_a+1} \cdot C_a \end{aligned}$$

ここで，$0 \leq \dfrac{|a|}{n_a} < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a|}{n_a}\right)^{n-n_a+1} = 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ が分かる．　□

注意 1.2. (1) で $k=1$ の場合，$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ $(a>1)$ の証明も分かる．
(2) の一般の a で分からない場合は，$a=e$ や 3.5 など，具体的な数字の場合を考えてみよ．

次に，2 つの無限大に発散する数列 $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ の発散する「スピード」（オーダー，位数）を比較してみよう．そのため， 次のような大小関係を導入する（[Su80], p.114, 定義 1 ）．

定義 1.3 (無限大の位数の比較)**.** $\{a_n\}_n$，$\{b_n\}_n$ を無限大に発散する数列とする．このとき，

$$a_n \ll b_n \ (n\to\infty) \quad \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty$$
$$\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

と書く．例えば，$n^2 \ll n^3$. これを，数列 $\{b_n\}_n$ は $\{a_n\}_n$ より**高位の無限大**と言う．

この比較 $\ll$ を用いると，定理 1.1 の結果は次のように書ける．

定理 1.4. $n\to\infty$ のときに，無限大に発散するオーダーを比較すると，

$$\begin{array}{ccccccc} \text{(対数関数)} & & (k\text{ 次多項式}) & & (\text{指数関数},\ a>1) & & \text{(階乗)} \\ \log n & \ll & n^k & \ll & a^n & \ll & n! \end{array}$$

である．

最初の $\log n \ll n^k$ は，$n \ll a^n$ の結果の log を取れば分かる．この事実は非常に良く用いるので，覚えておくと良い．

注意 1.5 (**Stirling (スターリング）の公式**)**.** 階乗 $n!$ の $n\to\infty$ での振る舞いは以下の様になることが知られている：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \qquad (n\to\infty).$$

ただし，$a_n \sim b_n$ $(n\to\infty)$ は，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ の意味である．これは **Stirling (スターリング）の公式** と呼ばれ，統計学で良く用いられる．

証明は，階乗を一般化したガンマ関数と π を無限積で表す *Wallis* （ウォリス）の公式を用いるが，簡単ではない．詳しくは，[Su80], p.339, 定理 15.7，あるいは，[Mi98], p.102 を見よ．

References

[Mi98] 溝口宣夫 他, 理工系の微分・積分, 学術図書出版社，(1998).

[Su80] 杉浦光夫, 解析入門 I, 基礎数学 2， 東京大学出版会, (1980).