条件収束する級数について（解析学 A）

（担当：高橋淳也）

1　条件収束する級数

1.1　条件収束する級数の例

無限級数で収束するが，絶対収束しない級数を **条件収束する** (conditionally converge) と言う．ここでは，条件収束するような級数の例を見る．

まず，交代調和級数 (alternating harmonic series) と呼ばれる次の級数の和を求めよう．（なお，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は調和級数と言う）．

定理 1.1 (交代調和級数)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=\log 2.$$

なお，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ より，この級数は絶対収束しない．

以下，定理 1.1 を示すのだが，より一般に次が成立する（$\log(1+x)$ の Taylor 展開）．

定理 1.2. 任意の $-1<x\leq 1$ に対して，以下が成立する：

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

（つまり，右辺の無限級数が $-1<x\leq 1$ において収束し，その和が $\log(1+x)$ である）．

注意 1.3. (1)　これは $\log(1+x)$ の $x=0$ での Taylor 展開である（後に学習する）．ここで，x の範囲に注意が必要である．まず，左辺は $-1<x$ で成立するが，右辺の級数は $-1<x\leq 1$ でしか収束しない．従って，$1<x$ ではこの等式は成立しない．
(2)　通常用いる Taylor 定理の剰余項表示（Lagrange の剰余項）では $0\leq x\leq 1$ の場合の収束しか分からず，$-1<x<0$ の場合は不明である．そのため，$-1<x<0$ の場合には別の方法（積分形の剰余項表示）を用いて収束することを示す．

ここでは Taylor の定理を用いずに，等比級数と積分を用いた直接的な議論により，右辺の級数が収束することを示す（積分形の剰余項表示と同じ方法）．

もちろん，$x=1$ の時が定理 1.1 である．

証明. $r\neq -1$ のとき，公比 $-r$ の有限等比級数の和を考えれば，

$$\frac{1}{1+r}=1-r+r^2-r^3+\cdots+(-r)^{n-1}+\frac{(-r)^n}{1+r}. \qquad (*)$$

ここで，次の 2 つに場合分けして考える : (I) $0 \leq x \leq 1$ のとき，(II) $-1 < x \leq 0$ のとき．

(I) $0 \leq x \leq 1$ のとき

この式の両辺を 0 から x まで積分すると，$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+r}dr = \log(1+x)$，$\displaystyle\int_0^x r^k dr = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ なので，

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+r}dr = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-r)^n}{1+r}dr \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-r)^n}{1+r}dr.\end{aligned}$$

ここで，

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad (n \text{ 部分和}), \quad R_n(x) := \int_0^x \frac{(-r)^n}{1+r}dr \quad (\text{剰余項})$$

と置くと，$0 \leq x \leq 1$ より，

$$\Big|S_n(x) - \log(1+x)\Big| = |R_n(x)| \leq \int_0^x \frac{|(-r)^n|}{1+r}dr \leq \int_0^x r^n dr = \frac{x^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

ゆえに，部分和列 $\{S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\log(1+x)$ に収束することが示せた．

(II) $-1 < x \leq 0$ のとき

(I) と同様に $(*)$ 式の両辺を 0 から x まで積分すると，

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+r}dr = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-r)^n}{1+r}dr.$$

右辺の第 2 項において，変数変換 $s = -r$ を行うと，$r : 0 \to x$ のとき $s : 0 \to -x$ で $dr = -ds$ なので，

$$\int_0^x \frac{(-r)^n}{1+r}dr = -\int_0^{-x} \frac{s^n}{1-s}ds.$$

従って，$-1 < x \leq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\Big|S_n(x) - \log(1+x)\Big| = |R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-r)^n}{1+r}dr\right| &= \int_0^{-x} \frac{s^n}{1-s}ds \\ &\leq \frac{1}{1+x} \cdot \int_0^{-x} s^n ds \quad \left(\frac{1}{1-s} \leq \frac{1}{1+x} \text{ による}\right) \\ &= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となり，やはり，定理の主張が示せた．

よって，(I), (II) から $-1 < x \leq 1$ で $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ が成立する． □

上式 $(*)$ で r を r^2 とし

$$\frac{1}{1+r^2} = 1 - r^2 + r^4 - r^6 + \cdots + (-1)^{n-1} r^{2(n-1)} + \frac{(-1)^n r^{2n}}{1+r}$$

に対して，定理 1.2 と同様の議論を行えば（$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+r^2} dr = \tan^{-1}(x)$ に注意），次を得る（$\tan^{-1}(x)$ の Taylor 展開）．

定理 1.4. 任意の $-1 \leq x \leq 1$ に対して，以下が成立する：

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

特に，$x=1$ のとき，$\tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ なので，Leibniz（ライプニッツ）の級数

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

を得る（ [Sug80], III 章 §3 例 3, p.202）．なお，Leibniz の級数も絶対収束しない：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

1.2 級数の和が項の順序によること

次に，条件収束する級数は，一般に，項の足す順序を変えると，和（極限）が変わってしまうことを，交代調和級数の場合を例に見よう（ [Sug80], III 章 §4 例 1, p.374）．

例 1.5. 定理 1.1 の交代調和級数の和を $S = \log 2$ と置く：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots. \qquad (\sharp)$$

まず，$(\sharp)$ の両辺を $\dfrac{1}{2}$ 倍すると

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots.$$

ここで，各項の間に 0 をはさんでも和は変わらないので，

$$\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots. \qquad (\flat)$$

$(\sharp)+(\flat)$ を各項ごとに行うと（無限級数 $\sum a_n, \sum b_n$ が収束すれば，$\sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ を用いる），

$$\frac{3}{2}S = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \cdots.$$

最後に 0 の項を取り除くと，

$$\frac{3}{2}S = \underbrace{1+\frac{1}{3}}_{\text{正 2 項}} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{負 1 項}} \underbrace{+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}_{\text{正 2 項}} \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\text{負 1 項}} +\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots.$$

この右辺は，最初の級数 (♯) において，正の項を 2 項，負の項を 1 項と足す順序を入れ替えた級数である．その和は $\frac{3}{2}S = \frac{3}{2}\log 2$ であり，最初の順序の級数の和 $S = \log 2$ (♯) とは異なる．

従って，項の順序を交換すると級数の和が変わることが分かった．

より一般に，この交代調和級数において，正の項を p 項，負の項を q 項（ p, q は自然数）と足す順序を入れ替えた級数の和は $\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$ であることが知られている． □

なお，絶対収束すれば，項の足す順序によらず，和（極限）は一定である．従って，項の足す順序により和が変わるのは，条件収束の場合となる．

そして，驚くべきことに，次が成立する．

定理 1.6 (Riemann)**.** 条件収束する級数は，うまく項の足す順序を変えれば，任意の実数に収束させたり，∞, $-\infty$ に発散させることができる．

証明は [Sug80], V 章 §4 定理 3.4, 注意 2, pp.373–374 を参照せよ．

参考文献

[Sug80] 杉浦光夫, 解析入門 I, 基礎数学 2, 東京大学出版会, (1980).