1 次元波動方程式の解法（解析学 B）

（担当：高橋淳也）

変数変換の応用として，1 次元波動方程式を解くことを考えてみよう．

問題 0.1. $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(t,x)$ が次の偏微分方程式 $(\sharp)$ を満たすとする：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x). \tag{$\sharp$}$$

ただし，$c > 0$ は定数．この偏微分方程式を 1 次元波動方程式という．この時，次の設問に答えよ．

(1) 任意の 1 変数 C^2 級関数 $g(s), h(s)$ に対して，

$$f(t,x) := g(x-ct) + h(x+ct)$$

は，波動方程式 $(\sharp)$ を満たすことを示せ．

(2) 逆に，波動方程式 $(\sharp)$ を解くことを考える．変数変換 $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ を行うと，$f(t,x)$ が波動方程式 $(\sharp)$ を満たす必要十分条件は，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \equiv 0 \qquad \text{(恒等的)}$$

であることを示せ．

(3) 1 次元波動方程式の初期値問題，すなわち，$f(0,x) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$ を満たす波動方程式 $(\sharp)$ の解は，以下のように表されることを示せ：

$$f(t,x) = \frac{1}{2}\Big\{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\Big\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy.$$

これを d'Alembert (ダランベール) の公式という．

解答. (1) 合成関数の微分法を使って計算すればよい．左辺は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(g(x-ct) + h(x+ct)\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(-c\,g'(x-ct) + c\,h'(x+ct)\Big) \\ &= (-c)^2\,g''(x-ct) + c^2\,h''(x+ct) = c^2\Big\{g''(x-ct) + h''(x+ct)\Big\}.\end{aligned}$$

右辺は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(g(x-ct) + h(x+ct)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(g'(x-ct) + h'(x+ct)\Big) \\ &= g''(x-ct) + h''(x+ct) = g''(x-ct) + h''(x+ct).\end{aligned}$$

よって，$g(x-ct) + h(x+ct)$ は $(\sharp)$ を満たす．

(2) 変数変換 $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ を行うと，$\begin{cases} t = -\dfrac{1}{2c}(u-v) \\ x = \dfrac{1}{2}(u+v) \end{cases}$ であり，$f(t,x)$ を (u,v) の関数と見たものを $\widetilde{f}(u,v)$ と書く：

$$\widetilde{f}(u,v) := f\Big(-\frac{1}{2c}(u-v), \frac{1}{2}(u+v)\Big).$$

これを u, v について偏微分すると，合成関数の微分法より，

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial u}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) f(t,x),$$
$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f(t,x),$$

すなわち，

$$\frac{\partial}{\partial u} = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

が成立する．ゆえに，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}(t,x) &= -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f(t,x) \\
&= -\frac{1}{4c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{1}{4c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} - c\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} - c^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right\} \\
&= -\frac{1}{4c^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right\}.
\end{aligned}$$

ただし，最後の等式で f が C^2 級のとき，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ を用いた．

以上より，$f(t,x)$ が 波動方程式 ($\sharp$) を満たすことと，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(t,x) \equiv 0$ を満たすことは同値である．

(3) (2) より，波動方程式 ($\sharp$) は $\dfrac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}(u,v) \equiv 0$ と同値なので，以下，これを解く．

まず，u について，1 つ固定した u_0 から u まで積分すると，

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u_0,v) = \int_{u_0}^{u} \underbrace{\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial u \partial v}(u,v)}_{\equiv 0}\, du = 0,$$

すなわち，任意の v のみの関数 $C(v)$ に対して，

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u_0,v) =: C(v) : v \text{ のみの関数}$$

となる（C は積分定数に相当するものだが，今，v を固定するごとに積分定数が変化するので，C は任意の v の関数になる）．さらに，v について，1 つ固定した v_0 から v まで積分すると，

$$\widetilde{f}(u,v) - \widetilde{f}(u,v_0) = \int_{v_0}^{v} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial v}(u,v)\, dv = \int_{v_0}^{v} C(v)\, dv.$$

従って，任意の u のみの関数 $g(u)$ と v のみの関数 $h(v)$ に対して，

$$\widetilde{f}(u,v) = \underbrace{\widetilde{f}(u,v_0)}_{g(u):u\text{ のみの関数}} + \underbrace{\int_{v_0}^{v} C(v)\,dv}_{h(v):v\text{ のみの関数}} = g(u) + h(v)$$

と書ける．今，$u = x - ct, v = x + ct$ と変換しているので，波動方程式 ($\sharp$) の解は

$$f(t,x) = \widetilde{f}(u,v) = g(x-ct) + h(x+ct) \tag{$\star$}$$

と書けることが分かった．

最後に，初期条件 $f(0,x) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$ から関数 g, h を決定する．($\star$) に $t = 0$ を代入すると，

$$\varphi(x) = f(0,x) = g(x) + h(x). \tag{0.1}$$

次に ($\star$) を t で偏微分してから $t = 0$ を代入すると，

$$\psi(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,x) = -cg'(x) + ch'(x). \tag{0.2}$$

よって，(0.2) と (0.1) を x で微分した式

$$\begin{cases} g'(x) + h'(x) = \varphi'(x) \\ g'(x) - h'(x) = -\dfrac{1}{c}\psi(x) \end{cases}$$

を連立させて解けば良い．まず，

$$g'(x) = \frac{1}{2}\Big\{\varphi'(x) - \frac{1}{c}\psi(x)\Big\}, \quad h'(x) = \frac{1}{2}\Big\{\varphi'(x) + \frac{1}{c}\psi(x)\Big\}$$

を，0 から x まで積分すると，

$$\begin{aligned} g(x) - g(0) &= \frac{1}{2}\int_0^x \Big\{\varphi'(x) - \frac{1}{c}\psi(x)\Big\}dx = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)dx, \\ h(x) - h(0) &= \frac{1}{2}\int_0^x \Big\{\varphi'(x) + \frac{1}{c}\psi(x)\Big\}dx = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)dx, \end{aligned}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} g(x) &= \Big\{g(0) - \frac{1}{2}\varphi(0)\Big\} + \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)dx, \\ h(x) &= \Big\{h(0) - \frac{1}{2}\varphi(0)\Big\} + \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)dx. \end{aligned} \tag{0.3}$$

今，$g(s), h(s)$ は任意の 1 変数関数なので，

$$g(0) = h(0) = \frac{1}{2}\varphi(0) \tag{0.4}$$

を満たすように取れる．

このとき，(0.3), (0.4) の結果を ($\star$) に代入すれば，波動方程式 ($\sharp$) の解は，

$$\begin{aligned} f(t,x) &= g(x-ct)+h(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\Big\} - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}\psi(x)dx + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\Big\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(x) \end{aligned}$$

となる． □

注意 0.2. (i) 偏微分方程式 ($\sharp$) は 1 次元波動方程式と呼ばれ，その解 $f(t,x)$ は，時刻 t と位置 x における波の高さを表している． ここで，c は波の速さである．

(ii) 問題 (2) の変数変換は，($\sharp$) を以下のように微分作用素として因数分解することから想起される：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)f(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)f(t,x)$$

なので，

$$\frac{\partial}{\partial u} = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

となるように変数変換 $u = x-ct, v = x+ct$ を行った．

(iii) n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 内の波動方程式は，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x_1,\ldots,x_n) = c^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t,x_1,\ldots,x_n), \quad (t\in\mathbb{R},(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n)$$

で与えられる．このときの解の表示は複雑である（一般に奇数次元と偶数次元で状況が異なる．$n=2,3$ 次元の場合は，以下の本の第 4 章を参照）．

(iv) 波動方程式に関する本は多数あるが，数学的側面から書かれた初学者向けの本として，次を挙げておく：

- 俣野博・神保道夫，熱・波動と微分方程式， 現代数学への入門，岩波書店， (2004). p.18—20.