

Schwarz の不等式とその具体例 (線型代数学 B)

(担当：高橋淳也)

1.1 内積空間

ここでは, Schwarz の不等式の証明とその具体例を説明する. そのために, まずベクトル空間の内積について確認しておく.

Definition 1.1 (内積空間). V を複素数 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 (無限次元でもよい) とする. 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して, 複素数 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{C}$ が対応し, 以下の (1), (2), (3) の性質を満たすとき, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ を $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の **内積** (inner product) と言う:

(1) (共役双線型性) すべての $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in V$ ($i = 1, 2$) とすべての $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle &= \alpha \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle + \beta \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}_1, \alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2 \rangle &= \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 \rangle.\end{aligned}$$

ここで, $\bar{\alpha}$ は α の複素共役を表す.

(2) (共役対称性) すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して,

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

(3) (正定値性) すべての $\mathbf{x} \in V$ に対して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.

さらに, $\mathbf{x} \in V$ が $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ を満たせば, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である. (この性質は重要!)

(逆は, (1) で $\alpha = \beta = 0$ とれば明らか).

このとき, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を備えたベクトル空間を **内積空間** (あるいは, **計量ベクトル空間**) と言い, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ と書く.

内積が定義されると, (3) 正定値性から, ベクトルの長さ (大きさ) が定義できる. これは, 実数 ($V = \mathbb{R}$) の場合は絶対値に相当する.

Definition 1.2 (長さ, ノルム). 内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して, ベクトル $\mathbf{x} \in V$ の **長さ** (length) (または, **大きさ**, **ノルム** (norm) とも言う) を

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq 0$$

と定める.

ここで, 内積の正定値性 (Definition 1.1 (3)) により, ルートの中身は常に 0 以上となり, 長さは必ず非負の実数値を取ることに注意. さらに, 正定値性から, $\|\mathbf{x}\| = 0$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ も分かる. (対偶を取れば, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $\|\mathbf{x}\| > 0$).

ここで, 複素数に関して幾つかの注意 (復習) をしておく.

Remark 1.3. (1) 複素数 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$) に対して, $\bar{\alpha} = a - bi$ と定め, これを α の 共役 (conjugate) と言う. 複素平面 (Gauß平面) ((x, y) -平面の x 軸に実部を, y 軸に虚部を対応させる) において, 複素共役は, 実軸に関する折り返しを与える.

特に, 複素数 α が実数であるための必要十分条件は, $\bar{\alpha} = \alpha$ である. 従って, 実内積のみを考える時は, 共役 $\bar{\cdot}$ をすべて無視して良い.

(2) 複素数 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の絶対値 (absolute value) は,

$$|\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} \geq 0$$

で定められる. これは, 複素平面 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ と見た時, 原点 $O = (0, 0)$ と点 $\alpha = (a, b)$ の距離に他ならない.

(3) 複素数の絶対値が, 複素 1 次元数ベクトル空間 $\mathbb{C}$ の標準内積から定まる長さとなる. (むしろ, 複素内積から定まる長さが通常複素数の絶対値となる様に, 複素内積の定義を与えた.)

1.2 Schwarz の不等式

複素内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ について復習したので, 目標の Schwarz の不等式の証明を与える.

Theorem 1.4. 複素内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して以下が成立する:

(1) (Schwarz の不等式) すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して,

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

が成立する. さらに, 等号 $=$ が成立するための必要十分条件は, $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ が 1 次従属である (すなわち, $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ または $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$ となる $t \in \mathbb{C}$ が存在する).

(2) (3 角不等式) すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ に対して,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

が成立する.

証明. (1) 任意に $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ を取る. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の時は明らかなので, 以下 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ とする. 内積の正值性より, すべての $t \in \mathbb{C}$ に対して, $\|t\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \geq 0$ でなくてはならない.

ここで, 内積の条件を用いて左辺を計算すると (平方完成の複素数版. なお, 複素数 α の絶対値は $|\alpha|^2 = \alpha \bar{\alpha}$ であることに注意),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|t\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle t\mathbf{x}, t\mathbf{x} \rangle + \langle t\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, t\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= t\bar{t}\|\mathbf{x}\|^2 + t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 = t\bar{t}\|\mathbf{x}\|^2 + t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \bar{t} \cdot \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \left(t\|\mathbf{x}\| + \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \cdot \overline{\left(t\|\mathbf{x}\| + \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{x}\|} \right)} - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \underbrace{\left| t\|\mathbf{x}\| + \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{x}\|} \right|^2}_{\geq 0} - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

でなくてはならない。従って、

$$-\frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0, \quad \text{すなわち,} \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

を得る。

次に、等号成立条件を示す。まず、等号が成立したとする。上の計算は勝手な $t \in \mathbb{C}$ に対して成立したので、特に、 $t = -\frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{x}\|^2}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ と仮定している) と取れば、

$$0 \leq \|t\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \underbrace{\left| t\|\mathbf{x}\| + \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{\|\mathbf{x}\|} \right|^2}_{=0} = 0$$

となり、内積の正定値性から $t\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ が従う。よって、 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ は 1 次従属となる。

逆に、 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ が 1 次従属の場合に等号が成立するのはすぐに分かる。

(2) 両辺自乗した式を示せばよい。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

ただし、 $\operatorname{Re}(\alpha)$ は複素数 α の実部を表す。すなわち、複素数 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して、 $\operatorname{Re}(\alpha) = a$ である。なお、最後の不等式は $\operatorname{Re}(\alpha) = a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$ を用いた。

ここで、右辺の第 2 項に Schwarz の不等式 $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ を用いると、

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

となるので、両辺のルートを取れば良い。 □

1.3 Schwarz の不等式の具体例

Schwarz の不等式を、具体的な内積空間の場合に見てみよう。

Example 1.5 (具体例). (1) $\mathbb{R}^n$ の標準内積

$\mathbb{R}^n$ の標準内積は、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := {}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

であった。このとき、Schwarz の不等式 (Theorem 1.4, (1)) を書き下すと、

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$$

となる。特に、 $n = 2$ の場合は、高校数学でもお馴染みの不等式であろう：

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \cdot \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}.$$

(2) $\mathbb{C}^n$ の標準内積

$\mathbb{C}^n$ の標準内積は, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := {}^t\mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \in \mathbb{C}$ であった. よって, このときの Schwarz の不等式は,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}.$$

(3) 連続関数のなす空間 $C^0(I; \mathbb{C})$ の内積 (L^2 -内積)

$C^0(I; \mathbb{C})$ を閉区間 $I = [a, b]$ ($a < b$) 上の複素数値連続関数のなすベクトル空間とする:

$$C^0(I; \mathbb{C}) = \left\{ f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } I \text{ 上連続} \right\}.$$

連続関数 $f, g \in C^0(I; \mathbb{C})$ に対し,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.1)$$

と定めると, $\langle, \rangle$ は $C^0(I; \mathbb{C})$ 上の内積となる. (内積となることの証明は, 後述).

さて, 上式 (1.1) で定まる内積に対して, Schwarz の不等式 (Theorem 1.4, (1)) を書き下すと,

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

これは積分形の Schwarz の不等式で, (実数値の場合は) 微分積分学で学んだであろう.

最後に, 式 (1.1) が実際にベクトル空間 $C^0(I; \mathbb{C})$ 上に内積を定めることを示す.

証明. まず, 閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数はつねに積分可能であるので, 連続関数に対してその内積や大きさが常に定義可能であることに注意しよう.

次に, 式 (1.1) が内積の条件 Denition 1.1 (1) — (3) を満たすことを確かめる. (1), (2) は, 積分の性質から直ぐに分かるので, (3) の正定値性のみ確かめる.

まず, $\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$ は明らかなので, $\|f\| = 0$ のとき $f \equiv 0$ (恒等的) を背理法で示す. $f \not\equiv 0$ 仮定する. このとき, f は連続なので, ある点 $x_0 \in (a, b)$ の十分小さい近傍 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上で $f(x) \neq 0$ となる. すると,

$$0 = \|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \underbrace{|f(x)|^2}_{>0} dx > 0$$

となり矛盾する. 従って, $f \equiv 0$ (恒等的) でなくてはならない. $\square$

Remark 1.6. 連続性を仮定せず, Riemann 積分可能な関数のみ仮定した場合, 内積の正定値性が満たされず, 式 (1.1) は, もはや内積にならない.

しかし, Schwarz の不等式のみ (つまり, 等号成立条件は除く) を示すのであれば, 内積の正定値性 (3) $\|f\| = 0 \implies f \equiv 0$ の条件が成立しなくても, Schwarz の不等式自体は成立する. 実際, 証明では, 内積の正定値性 (3) $\|f\| = 0 \implies f \equiv 0$ の性質は, 等号成立を示す際のみ用いられており, Schwarz の不等式自体の証明には一切用いられていないからである.

Remark 1.7. 連続性を仮定せず，任意の関数全体のなすベクトル空間に対して，同様にして内積を定義しようとしても，一般には正定値性が満たされないため，内積にならない．
 実際，関数

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x : \text{有限個の点}) \\ 0 & (x : \text{その他}) \end{cases}$$

と定めると， $\int_b^a |f(x)|^2 dx = 0$ だが $f(x) \not\equiv 0$ である．