

2008年4月11日の講義の補足説明

- $\forall x : \text{実数}, x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$
- $x = 1$ とすると $x^2 - x - 1 = -1 < 0$
- $(\forall x : p(x), q(x))$ と書くことにより、 $p(x)$ を満たす x のみに対して \forall を適用する、ということを表す。
- $(\exists x : \text{実数}, x^2 - x - 1 > 0)$ であることを確認するためには、例えば $x = 2$ とすればこの不等式が成立する、ということのみ述べれば良い。この命題の否定は $(\exists x : \text{実数}, x^2 - x - 1 \leq 0)$ ではない (これもまた $x = 0$ とすれば真になっている)。否定は

$$(\forall x : \text{実数}, x^2 - x - 1 \leq 0)$$

となる。

- 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ の定義は

$$\forall \varepsilon > 0, (\exists n_0 : \text{正整数}, (\forall n : \text{正整数で } n > n_0, |a_n - a| < \varepsilon))$$

だが、

$$\forall \varepsilon > 0, (\exists n_0 : \text{正整数}, (\forall n : \text{正整数}, n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon))$$

と書くこともある。実際、一般に次のような書き換えができるので、どちらでも正しい。

$$\begin{aligned} (\forall n : p(n), q(n)) &= (\forall n : p(n), \overline{p(n)} \vee q(n)) \wedge (\forall n : \overline{p(n)}, \overline{p(n)} \vee q(n)) \\ &= (\forall n, \overline{p(n)} \vee q(n)) \\ &= (\forall n, p(n) \implies q(n)) \end{aligned}$$

- 定理 A を $m \times n$ 行列とする。このとき、 $\text{rank } A$ は、 A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

例えば行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

の3次小行列式(4通りある)はすべて0であり、2次小行列式は例えば左上隅をとれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

なので、階数は2ということがわかる、という意味である。一般に、整数 k に関する条件 $p(k)$ を満たす k の最大値が r とは、

$$p(r) \wedge (\forall k > r, \overline{p(k)})$$

と書ける。 $p(k)$ として「ある k 次的小行列 B があってその行列式が0でない」(その否定は $(\forall B : k \text{ 次の小行列}, \det B = 0)$ となる) という条件をとることで、定理を論理記号を用いて書き表すことができる。