2008年4月18日

集合論の教科書でよくある演習問題：$A \cup B = B \iff A \subset B$ は次のようにして証明できる。

$$
\begin{aligned}
(A \cup B = B) &= \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \iff q(x)\Big) \\
&= \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \Longrightarrow q(x)\Big) \wedge \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \Longleftarrow q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{\big(p(x) \vee q(x)\big)} \vee q(x)\Big) \wedge \Big((p(x) \vee q(x)) \vee \overline{q(x)}\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}\big) \vee q(x)\Big) \wedge \Big(p(x) \vee (q(x) \vee \overline{q(x)})\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}\big) \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \vee q(x)\Big) \wedge \Big(\overline{q(x)} \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(p(x) \Longrightarrow q(x)\Big) \\
&= (A \subset B).
\end{aligned}
$$

次が成立する。

$$
\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times B &= \bigcap_{i \in I}(A_i \times B) \\
\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times B &= \bigcup_{i \in I}(A_i \times B)
\end{aligned}
$$

実際、

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right) \wedge (y \in B) \\
&\iff (\forall i \in I,\ x \in A_i) \wedge (y \in B) \\
&\iff \forall i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) \\
&\iff \forall i \in I,\ (x, y) \in A_i \times B \\
&\iff (x, y) \in \bigcap_{i \in I}(A_i \times B),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&(x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B \\
&\iff \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \land (y \in B) \\
&\iff (\exists i \in I,\ x \in A_i) \land (y \in B) \\
&\iff \exists i \in I,\ ((x \in A_i) \land (y \in B)) \qquad \text{（分配法則より）} \\
&\iff \exists i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B \\
&\iff (x,y) \in \bigcup_{i\in I} (A_i \times B),
\end{aligned}$$

もっと一般に、

$$\bigcap_{i\in I}\left(\prod_{j\in J} A_{i,j}\right) = \prod_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right)$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned}
(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right) &\iff \forall j \in J,\ x_j \in \bigcap_{i\in I} A_{i,j} \\
&\iff \forall j \in J,\ (\forall i \in I,\ x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall (i,j) \in I \times J,\ x_j \in A_{i,j} \\
&\iff \forall i \in I,\ (\forall j \in J,\ x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall i \in I,\ (x_j)_{j\in J} \in \prod_{i\in I} A_{i,j} \\
&\iff (x_j)_{j\in J} \in \bigcap_{i\in I}\Bigl(\prod_{i\in I} A_{i,j}\Bigr).
\end{aligned}$$

集合 A のベキ集合 2^A とは、A の部分集合全体からなる集合とする。

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}$$

例えば、$A = \{1,2,3\}$ のとき、

$$2^A = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\emptyset\}$$

である。$\{1,2\} \subset A$, $\{1,2\} \in 2^A$, $\{\{1,2\}\} \subset 2^A$, $\{\{1\},\{2\}\} \subset 2^A$ は真であるが $\{1,2\} \subset 2^A$ は偽である。