2008年4月25日

一般に集合 A, B に対し、B^A を、

$$B^A = \prod_{a \in A} B$$

と定義し、B^A の元を A から B への写像という。B^A の元は $(b_a)_{a \in A}$ と書くが、これは A の各元 a に対して B の元 b_a が定まっている、ということになる。このように書くかわりに、$b_a = f(a)$ と書いて、$f : A \to B$ を A から B への写像というのが普通である。

写像 $f : A \to B$ に対して、A を f の定義域といい、

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

を f のグラフという。

一般に、

$$\exists x,\ p(x)$$

は条件 $p(x)$ を満たす x が少なくとも一つ存在すること、

$$\exists! x,\ p(x)$$

は条件 $p(x)$ を満たす x がただ一つ存在することを表す。

2^A と $\{0,1\}^A$ とは自然に対応がある。$B \in 2^A$ に対して、次で定義される $\chi_B \in \{0,1\}^A$ を B の特性関数という：

$$\chi_B : A \to \{0,1\}, \quad \chi_B(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in B, \\ 0 & \text{if } a \notin B. \end{cases}$$

「対応」とはどういう意味か。これを説明するために

- $f : A \to B$ が全射とは $\forall b \in B, \exists a \in A,\ f(a) = b.$
- $f : A \to B$ が単射とは $\forall a \in A,\ \forall a' \in A,\ (f(a) = f(a') \implies a = a').$
- $f : A \to B$ が全単射とは f が全射かつ単射のときをいう。

$f : 2^A \to \{0,1\}^A,\ f(B) = \chi_B$ は全単射。

$f : A \to B,\ g : B \to C$ に対して、合成写像 $g \circ f : A \to C$ が定義できる。

- $g \circ f$ が単射ならば f は単射、
- $g \circ f$ が全射ならば g は全射。

$X \subset A,\ f : A \to B$ とするとき、

$$\bigcup_{x \in X} \{f(x)\}$$

を $\{f(x) \mid x \in X\}$ または $f(X)$ と書き、f による X の像という。したがって

$$b \in \{f(x) \mid x \in X\} \iff \exists x \in X,\ b = f(x).$$

また、$Y \subset B$ に対し、$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A,\ f(a) \in Y\}$ を f による Y の逆像という。

- $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$,
- $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f(Y_j)$,
- $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f(Y_j)$,
- $X \subset f^{-1}(f(X))$,
- $Y \cap f(A) = f(f^{-1}(Y))$.

恒等写像 $\mathrm{id}_A : A \to A$ とは、$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a$ を満たす写像。$f : A \to B$ に対して、$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす $g : B \to A$ を f の逆写像といい、$g = f^{-1}$ と書く。f が逆写像をもつとき、$Y \subset B$ に対して $f^{-1}(Y)$ は 2 通りに定義されていることに注意。実は 2 つの定義は同じになる。

$$\prod_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{f \in J^I} \prod_{i \in I} a_{i,f(i)}.$$

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}.$$

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{f \in J^I} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}.$$

有限集合 A の元の個数を $|A|$ と書く。

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A||B|,\ |A^B| = |A|^{|B|}$
- $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$ if $A_i \cap A_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$.