2008年4月25日

前回の小テストの解き方：

$$\inf\{x^n \mid n \in \{1,2,\dots\}\} = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1, \\ x & \text{if } 1 \le x. \end{cases}$$

B^A は A から B への写像全体の集合である。

べき集合 2^A は A の部分集合全体からなる集合。2^A と書くには理由がある。

写像はそのグラフを定めることによって定めることもできる。写像のグラフ $G \subset A \times B$ は条件

$$\forall a \in A,\ G \cap (\{a\} \times B) \text{ はちょうどひとつの元からなる} \tag{1}$$

を満たし、逆にこの条件を満たす $G \subset A \times B$ はある写像のグラフである。上の条件 (1) を略記するために、∃! という記号を用いる：

$$\forall a \in A,\ \exists! b \in B,\ (a,b) \in G. \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}\Bigl(\bigcap_{j\in J} Y_j\Bigr) &= \{a \mid a \in A,\ f(a) \in \bigcap_{j\in J} Y_j\} \\ &= \{a \mid a \in A,\ \forall j \in J,\ f(a) \in Y_j\} \\ &= \{a \mid \forall j \in J,\ (a \in A,\ f(a) \in Y_j)\} \\ &= \{a \mid \forall j \in J,\ a \in f^{-1}(Y_j)\} \\ &= \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Y_j). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \in f\bigl(f^{-1}(y)\bigr) &\iff \exists a,\ \Bigl(\bigl(a \in f^{-1}(y)\bigr) \land \bigl(b = f(a)\bigr)\Bigr) \\ &\iff \exists a,\ \Bigl(\bigl(a \in A\bigr) \land \bigl(f(a) \in Y\bigr) \land \bigl(b = f(a)\bigr)\Bigr) \\ &\iff \exists a,\ \Bigl(\bigl(a \in A\bigr) \land \bigl(b \in Y\bigr) \land \bigl(b = f(a)\bigr)\Bigr) \\ &\iff \bigl(b \in Y\bigr) \land \Bigl(\exists a,\ \bigl(a \in A\bigr) \land \bigl(b = f(a)\bigr)\Bigr) \\ &\iff \bigl(b \in Y\bigr) \land \bigl(b \in f(A)\bigr) \\ &\iff b \in Y \cap f(A). \end{aligned}$$