2008年5月2日

有限集合 A の元の個数を $|A|$ と書く。

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A||B|$
- $|A^B| = |A|^{|B|}$
- $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ if $A_i \cap A_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$ (disjoint と言う)

$f : A \to B$ を有限集合 A から B への写像とする。このとき、f が全射ならば $|A| \geq |B|$ であり、f が単射ならば $|A| \leq |B|$ である。特に、f が全単射ならば $|A| = |B|$ である。

有限集合とは、

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \exists f : \{1, 2, \ldots, n\} \to X,\ f \text{ は全単射}$$

を満たす集合 X のこと。これを否定したのが無限集合の定義となる。$\mathbf{N}$ は無限。$\mathbf{N}$ を含む集合は無限。

X, Y を無限集合とするとき、

$$\begin{aligned}
&\exists f : X \to Y,\ f \text{ は全射}\quad \text{のとき } |X| \geq |Y|,\\
&\exists f : X \to Y,\ f \text{ は単射}\quad \text{のとき } |X| \leq |Y|,\\
&\exists f : X \to Y,\ f \text{ は全単射}\quad \text{のとき } |X| = |Y|
\end{aligned}$$

と書く。

- シュレーダー・ベルンシュタインの定理：$|X| \geq |Y|$ かつ $|X| \leq |Y|$ ならば $|X| = |Y|$.
- カントールの定理：$|X| < 2^{|X|}$.

$S \subset A \times B$ のとき、

$$\begin{aligned}
|S| &= \sum_{a \in A} |\{b \mid b \in B,\ (a, b) \in S\}|\\
&= \sum_{b \in B} |\{a \mid a \in A,\ (a, b) \in S\}|
\end{aligned}$$