2008年5月2日

$f : A \to B$ を有限集合 A から B への写像とする。このとき、f が全射ならば $|A| \geq |B|$ であり、f が単射ならば $|A| \leq |B|$ である。このことの証明をよく見ると、次の事実もわかる。

- f が全射でかつ $|A| = |B|$ ならば、f は全単射。
- f が単射でかつ $|A| = |B|$ ならば、f は全単射。

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ集合 X から Y, Y から Z への写像とする。f, g がともに全射であれば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全射、f, g がともに単射であれば $g \circ f$ も単射となる。したがって、

- $|X| \geq |Y|$ かつ $|Y| \geq |Z| \implies |X| \geq |Z|$
- $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z| \implies |X| \leq |Z|$

例えば、A を正二十面体の面の集合、B を正二十面体の頂点の集合、とし、$S \subset A \times B$ を、$a \in b$ を満たす組 (a, b) 全体とする。各面は正三角形なので、$|S| = 3|A| = 60$ である。一方、各頂点には5つの正三角形が集まっているので、$|S| = 5|B|$ である。よって $|B| = 12$ となる。