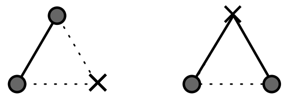
2008年5月9日

$|A| = k \leq |B| = n$ とする。

$$
\begin{aligned}
\left|\binom{B}{k}\right| &= |\{X \mid X \subset B,\ |X| = k\}| \\
&= \sum_{\substack{X \subset B \\ |X|=k}} 1 \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{X \subset B \\ |X|=k}} k! \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{X \subset B \\ |X|=k}} |\{f \mid f : A \to X \ (\text{全単射})\}| \\
&= \frac{1}{k!} \, |\{(X, f) \mid X \subset B,\ |X| = k,\ f : A \to X \ (\text{全単射})\}| \\
&= \frac{1}{k!} \, |\{(X, f) \mid X \subset B,\ f : A \to B \ (\text{単射}),\ f(A) = X\}| \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{f : A \to B \\ \text{単射}}} |\{X \mid X \subset B,\ f(A) = X\}| \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{f : A \to B \\ \text{単射}}} 1 \\
&= \frac{1}{k!} \, n(n-1)\cdots(n-k+1) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
2|G| &= \sum_{T \in G} 2 \\
&= \sum_{T \in G} \left|\left\{x \mid x \in T,\ \overbrace{\boxed{T - \{x\} \text{ は } x \text{ の知人と } x \text{ の知人でない人からなる}}}^{\alpha(T-\{x\},x)}\right\}\right| \\
&= |\{(x,T) \mid (x,T) \in X \times G,\ x \in T,\ \alpha(T - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{T \mid T \in S,\ x \in T,\ \alpha(T - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} \left|\left\{T \mid T \in \tbinom{X}{3},\ x \in T,\ \alpha(T - \{x\}, x)\right\}\right| \\
&= \sum_{x \in X} \left|\left\{P \mid P \in \tbinom{X-\{x\}}{2},\ \alpha(P, x)\right\}\right| \\
&= \sum_{x \in X} |\{x \text{ の知人 }\} \times \{x \text{ と知人でない人 }\}| \\
&= \sum_{x \in X} r_x(n - 1 - r_x) \\
&= -\sum_{x \in X} (r_x^2 - (n-1)r_x) \\
&= -\sum_{x \in X} \left((r_x - \tfrac{n-1}{2})^2 - \tfrac{(n-1)^2}{4}\right) \\
&\le \begin{cases} n\frac{(n-1)^2}{4} & n : \text{odd} \\ n\frac{n^2-2n}{4} & n : \text{even} \end{cases}
\end{aligned}
$$

特に、$n = 6$ のとき、

$$|S| \le 6\tfrac{6^2 - 2 \cdot 6}{8} = 18 < 20 = \binom{6}{3}$$