

2008年5月16日

$(X, R)$  を半順序集合とし、 $(x, y) \in R$  のとき  $x \leq y$  と書くことにする。次を仮定する。

$$\forall x \in X, \forall y \in X, (x \leq y \implies \{z \mid z \in X, x \leq z, z \leq y\}) \text{ は有限}$$

例えば、 $\mathbf{Z}$  における大小関係、 $\mathbf{N}$  における整除など。このような  $(X, R)$  に対し、Möbius 関数  $\mu : X \times X \rightarrow \mathbf{Z}$  を、次を満たす関数として定義する。

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \not\leq y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & \text{if } x < y \end{cases}$$

例えば  $X = 2^A$  を包含関係に関して半順序集合とみたとき、

$$\mu(B, C) = \begin{cases} (-1)^{|C|-|B|} & \text{if } B \subset C, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また、 $X = \mathbf{N}$  を整除に関して半順序集合とみたとき、 $\mu(1, n)$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) を  $\mu(n)$  と略記し、これを単に Möbius 関数ということもある。

再び一般に、 $(X, R)$  を半順序集合とする。ゼータ関数  $\zeta : X \times X \rightarrow \mathbf{Z}$  を

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする。 $\mu, \zeta$  をともに行列と考えて、積を計算すると

$$(\mu\zeta)_{x,y} = \sum_{z \in X} \mu(x, z)\zeta(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \delta_{x,y}$$

従って  $\mu\zeta = \zeta\mu = I$  (単位行列)。

定理 1.  $f, g : X \rightarrow \mathbf{Z}$  が

$$\forall x \in X, g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

を満たすとする

$$\forall x \in X, f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y, x)g(y)$$

が成り立つ。

$A_i (i \in I)$  を  $A$  の部分集合とする。  $f: 2^I \rightarrow \mathbf{Z}$  を

$$f(J) = |\{a \mid a \in A, J = \{j \mid j \in I, a \notin A_j\}\}|$$

により定義し、

$$g(J) = \sum_{K \subset J} f(K)$$

とおくと

$$\forall J \in 2^I, g(J) = \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

となる。これより

$$\left| X - \bigcup_{i \in I} A_i \right| = f(I) = \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

$|A| = m \geq |B| = n$  とし、  $F_b = \{f \mid f: A \rightarrow B, b \notin f(A)\}$  とおく。すると

$$\begin{aligned} & |\{f \mid f: A \rightarrow B, f \text{ は全射}\}| \\ &= \left| B^A - \bigcup_{b \in B} F_b \right| \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{C \in \binom{B}{i}} (-1)^i |\{f \mid f: A \rightarrow B, C \cap f(A) = \emptyset\}| \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^m. \end{aligned}$$

$A$  を有限集合、  $X = 2^A$ ,

$$R = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X, x \subset y\}$$

とすると、  $x_0 = \emptyset$  は最小元であり、  $\mu(x) = (-1)^{|x|}$  となる。

$R \subset X \times X$  を同値関係とし、  $x \in X$  とするとき、

$$[x] = \{y \mid y \in X, (x, y) \in R\}$$

を、(関係  $R$  に関する、)  $x$  を含む同値類という。同値類全体の集合

$$\{[x] \mid x \in X\}$$

を関係  $R$  による商集合といい、  $X/R$  と書く。  $\pi: X \rightarrow X/R, \pi(x) = [x]$  を自然な写像という。