2008年5月16日

推移律 $\forall a,b,c \in X,\ (a,b) \in R,\ (b,c) \in R \implies (a,c) \in R$

であったが、これは $(a,b) \in R,\ (b,c) \in R$ を満たすような a,b,c が存在することを意味してはいない。$\implies$ の意味を思い出すと、

$$\forall a,b,c \in X,\ \overline{((a,b) \in R) \wedge ((b,c) \in R)} \vee ((a,c) \in R)$$

したがって、$R = \emptyset \subset X \times X$ は推移律を満たす。

$B \subset C \subset A$ のとき、2^A における Möbius 関数 μ の (B,C) での値は、帰納的に

$$\begin{aligned}
\mu(B,C) &= -\sum_{B \subset D \subsetneq C} (-1)^{|D|-|B|} \\
&= -\sum_{\substack{E \in 2^{C-B} \\ E \neq C-B}} (-1)^{|E|} \\
&= -\sum_{i=0}^{|C-B|-1} \sum_{E \in \binom{C-B}{i}} (-1)^|E| \\
&= -\sum_{i=0}^{|C-B|-1} \binom{|C-B|}{i} (-1)^i \\
&= -((1-1)^{|C-B|} - (-1)^{|C-B|}) \\
&= (-1)^{|C-B|}
\end{aligned}$$

写像 $f,g : X \to \mathbf{Z}$ をベクトル $(f(x))_{x \in X},\ (g(x))_{x \in X}$ と考えると、$g = f\zeta$ から $g\mu = f$ が得られる。これは

$$\forall x \in X,\ g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

から

$$\forall x \in X,\ f(x) = \sum_{y \leq x} \mu(y,x) g(y)$$

が導かれることを意味している。