番号 ________________ 名前 ________________ 2008 年 5 月 30 日

関係 $R \subset X \times X$ を X に関する性質。

反射律 $\forall a \in X,\ (a,a) \in R$

対称律 $\forall a,b \in X,\ (a,b) \in R \implies (b,a) \in R$

推移律 $\forall a,b,c \in X,\ (a,b) \in R,\ (b,c) \in R \implies (a,c) \in R$

$\mathbf{Z}$ 上の以下の関係 R が上の性質を持つかどうか決定せよ。

R	反射律	対称律	推移律
$\{(a,b) \mid a < b\}$			
$\{(a,b) \mid a+b$ は奇数 $\}$			
$\{(a,b) \mid a+b$ は偶数 $\}$			
$\{(a,b) \mid ab = 1\}$			
$\{(a,b) \mid \sqrt{ab}$ は整数 $\}$			

解説

R	反射律	対称律	推移律
$\{(a,b) \mid a < b\}$	×	×	○
$\{(a,b) \mid a+b$ は奇数 $\}$	×	○	×
$\{(a,b) \mid a+b$ は偶数 $\}$	○	○	○
$\{(a,b) \mid ab = 1\}$	×	○	○
$\{(a,b) \mid \sqrt{ab}$ は整数 $\}$	○	○	×

- $(0,0) \notin \{(a,b) \mid ab = 1\}$ であるから、反射律は成り立たない。
- $(x,y),(y,z) \in \{(a,b) \mid ab = 1\}$ とすると、$xy = yz = 1$ である。$x,y,z \in \mathbf{Z}$ であるから、$x,y,z \in \{1,-1\}$ となり、特に $y^2 = 1$ である。従って $xz = xzy^2 = (xy)(yz) = 1$ である。よって推移律は成り立つ。
- $(2,0),(0,3) \in \{(a,b) \mid \sqrt{ab}$ は整数 $\}$ だが、$(2,3) \notin \{(a,b) \mid \sqrt{ab}$ は整数 $\}$ となり、推移律は成り立たない。ただし、$\mathbf{Z}$ ではなく、$\mathbf{Z} - \{0\}$ 上の関係と考えると推移律は成り立つ。実際 $(x,y),(y,z) \in \{(a,b) \mid \sqrt{ab}$ は整数 $\}$ とすると、$\mathbf{Z} \ni \sqrt{xy}\sqrt{yz} = |y|\sqrt{xz}$ となり、$y \in \mathbf{Z} - \{0\}$ より $\sqrt{xz}$ は有理数、したがって整数となる。