2008年6月6日

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$
$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

とし、$\mathbf{N}_0^2 = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ 上の関係 R を次で定める。

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbf{N}_0^2 \mid a + d = b + c\}$$

すると R は同値関係になる。これは、R を定義している条件は $a - b = c - d$ ということなので、差が同じ非負整数の組を同値類にまとめたものになっている。したがって、

$$((a,b),(c,d)) \in R \iff \exists \alpha \in \mathbf{Z},\ c = a + \alpha,\ d = b + \alpha.$$

$\mathbf{N}_0^2/R$ と $\mathbf{Z}$ の間の全単射を構成したことで、$\mathbf{N}_0$ を使って $\mathbf{Z}$ を「定義」したことになっている。

$$X = \{(a,b) \mid a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a,b),(c,d)) \mid ((a,b),(c,d)) \in X \times X,\ ad = bc\}$$

とおくと、R は X 上の同値関係になる。X/R と $\mathbf{Q}$ の間の全単射を構成したことで、X を使って $\mathbf{Q}$ を「定義」したことになっている。

$\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ を構成する方法は、「Dedekind の切断」を用いる方法と、コーシー列を用いる方法がある。