番号 ________________ 名前 ________________　　2008 年 6 月 6 日

$\mathbf{N}_0^2 = \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ 上の同値関係 R を次で定める。

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbf{N}_0^2 \mid a+d = b+c\}.$$

商集合 $\mathbf{N}_0^2/R$ から $\mathbf{Z}$ への写像　f を

$$f([a,b]) = a - b$$

によって定める。

このとき、$\mathbf{N}_0^2/R$ に演算 $\times$ を定義し、それが well-defined であることを確認し、さらに

$$f(\times([a,b],[c,d])) = f([a,b])f([c,d])$$

が成り立つようにせよ。ただし、右辺は $\mathbf{Z}$ における通常の積である。

解答

写像　$\times : (\mathbf{N}_0^2/R)^2 \to \mathbf{N}_0^2/R$ を $\times([a,b],[c,d]) = [ac+bd, ad+bc]$ によって定める。

Well-defined については、$\big([a,b],[c,d]\big), \big([a',b'],[c',d']\big) \in (\mathbf{N}_0^2/R)^2$ に対して

$$\begin{aligned} [a,b] = [a',b'],\ [c,d] = [c',d'] &\Longrightarrow a+b' = b+a',\ c+d' = d+c' \\ &\Longrightarrow a-b = a'-b',\ c-d = c'-d' \qquad (\text{in } \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} a'c' + b'd' - (b'c' + a'd') &= (a'-b')(c'-d') \\ &= (a-b)(c-d) \\ &= ac + bd - (bc + ad). \end{aligned}$$

よって

$$(ac+bd) + (b'c' + a'd') = (a'c' + b'd') + (bc + ad),$$

つまり $[ac+bd, bc+ad] = [a'c' + b'd', b'c' + a'd']$ なので $\times$ は well-defined.

次に

$$\begin{aligned} f\big(\times([a,b],[c,d])\big) &= f\big([ac+bd, bc+ad]\big) \\ &= ac + bd - (bc + ad) \\ &= (a-b)(c-d) \\ &= f([a,b])f([c,d]). \end{aligned}$$