番号 ________________ 名前 ________________ 2008 年 6 月 13 日

以下の剰余環のうち、$\mathbf{C}$ と同型になるものはどれか。

$\mathbf{R}[x]/(x^2-1)$	
$\mathbf{R}[x]/(x^2+x+1)$	
$\mathbf{R}[x]/(x^3+1)$	
$\mathbf{R}[x]/(x^4+1)$	

解答

- $\mathbf{R}[x]/(x^2-1)$ は整域ではない。実際 $[x+1] \in \mathbf{R}[x]/(x^2-1)$, $[x-1] \in \mathbf{R}[x]/(x^2-1)$, $[x+1] \neq [0]$, $[x-1] \neq [0]$ だが $[x+1][x-1] = [x^2-1] = [0]$ となる。

- $g : \mathbf{R}[x]/(x^2+x+1) \to \mathbf{C}$, $g([f(x)]) = f(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})$ が定義できて、これは全単射であり、しかも $[f_1(x)], [f_2(x)] \in \mathbf{R}[x]/(x^2+x+1)$ に対して

$$g([f_1(x)] + [f_2(x)]) = g([f_1(x)]) + g([f_2(x)]),$$
$$g([f_1(x)] \times [f_2(x)]) = g([f_1(x)])g([f_2(x)])$$

  ただし右辺は $\mathbf{C}$ における和と積である。よって $\mathbf{R}[x]/(x^2+x+1)$ は $\mathbf{C}$ と同型である。

- $\mathbf{R}[x]/(x^3+1)$ は整域ではない。実際 $[x+1] \in \mathbf{R}[x]/(x^3+1)$, $[x^2-x+1] \in \mathbf{R}[x]/(x^3+1)$, $[x+1] \neq [0]$, $[x^2-x+1] \neq [0]$ だが $[x+1][x^2-x+1] = [x^3+1] = [0]$ となる。

- $\mathbf{R}[x]/(x^4+1)$ は整域ではない。実際 $[x^2+\sqrt{2}x+1] \in \mathbf{R}[x]/(x^4+1)$, $[x^2-\sqrt{2}x+1] \in \mathbf{R}[x]/(x^4+1)$, $[x^2+\sqrt{2}x+1] \neq [0]$, $[x^2-\sqrt{2}x+1] \neq [0]$ だが $[x^2+\sqrt{2}x+1][x^2-\sqrt{2}x+1] = [x^4+1] = [0]$ となる。