2008年6月20日

$g: A \to B$ を環の同型写像、すなわち、g は全単射でかつ、任意の $a, b \in A$ に対して、

$$g(a+b) = g(a) + g(b),$$
$$g(ab) = g(a)g(b)$$

を満たすとする。このとき、

$$g(0) = 0$$

が成り立つ。ただし、左辺の 0 は環 A の零元であり、右辺の 0 は環 B の零元である。実際、

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 + g(0) \\ &= (g(0) + (-g(0))) + g(0) \\ &= (-g(0)) + (g(0) + g(0)) \\ &= (-g(0)) + g(0+0) \\ &= (-g(0)) + g(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

また、B が整域ならば A も整域である。実際、$a \in A,\ b \in A,\ a \neq 0,\ b \neq 0$ とすると g は単射なので $g(a) \neq g(0) = 0,\ g(b) \neq g(0) = 0$ となる。B は整域なので $g(a)g(b) \neq 0$ となるが、$g(ab) = g(a)g(b)$ より、$g(ab) \neq 0$ となる。これは $ab \neq 0$ を意味している。