

番号 _____ 名前 _____ 2008 年 6 月 20 日

$A = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[x]$ の元 $a = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$ と $b = x^2 + 2x + 1$ に対して $d = \gcd(a, b)$ を求め、 $sa + tb = d$ となる $s, t \in A$ を一組求めなさい。

解答

a を b で割ると

$$a = (x^2 + 3x)b + x + 1.$$

次に、 b を $x + 1$ で割ると

$$b = (x + 1)(x + 1)$$

となるので、 $\gcd(a, b) = x + 1$ であり、

$$x + 1 = a - (x^2 + 3x)b = a + (4x^2 + 2x)b.$$

番号 _____ 名前 _____ 2008年6月20日(2008年6月27日提出)

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x])/(x^2 + 1)$ における乗積表を完成させなさい。

\times	1	2	x	$x + 1$	$x + 2$	$2x$	$2x + 1$	$2x + 2$
1	1	2	x	$x + 1$	$x + 2$	$2x$	$2x + 1$	$2x + 2$
2	2	1	$2x$	$2x + 2$	$2x + 1$	x	$x + 2$	$x + 1$
x	x	$2x$	2	$x + 2$	$2x + 2$	1	$x + 1$	$2x + 1$
$x + 1$	$x + 1$	$2x + 2$	$x + 2$	$2x$	1	$2x + 1$	2	x
$x + 2$	$x + 2$	$2x + 1$	$2x + 2$	1	x	$x + 1$	$2x$	2
$2x$	$2x$	x	1	$2x + 1$	$x + 1$	2	$2x + 2$	$x + 2$
$2x + 1$	$2x + 1$	$x + 2$	$x + 1$	2	$2x$	$2x + 2$	x	1
$2x + 2$	$2x + 2$	$x + 1$	$2x + 1$	x	2	$x + 2$	1	$2x$

また、上の乗積表が次の形になるように、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ を定めなさい。

\times	1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	1
α_2	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	1	α_1
α_3	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	1	α_1	α_2
α_4	α_4	α_5	α_6	α_7	1	α_1	α_2	α_3
α_5	α_5	α_6	α_7	1	α_1	α_2	α_3	α_4
α_6	α_6	α_7	1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
α_7	α_7	1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6

$\alpha_1 =$	$2x + 1$	$2x + 2$	$x + 1$	$x + 2$
$\alpha_2 =$	x	$2x$	$2x$	x
$\alpha_3 =$	$x + 1$	$x + 2$	$2x + 1$	$2x + 2$
$\alpha_4 =$	2	2	2	2
$\alpha_5 =$	$x + 2$	$x + 1$	$2x + 2$	$2x + 1$
$\alpha_6 =$	$2x$	x	x	$2x$
$\alpha_7 =$	$2x + 2$	$2x + 1$	$x + 2$	$x + 1$