

番号 _____ 名前 _____ 2008 年 7 月 4 日

次の命題の証明を完成せよ。

$$a, b, c \in \mathbf{N} \implies \gcd(ca, cb) = c \gcd(a, b).$$

証明 $d = \gcd(a, b)$, $d' = \gcd(ca, cb)$ とおくと、 \gcd の定義より、

$$d|a, d|b \tag{1}$$

$$\forall e \in \mathbf{N}, e|a, e|b \implies e|d \tag{2}$$

$$d'|ca, d'|cb \tag{3}$$

$$\forall f \in \mathbf{N}, f|ca, f|cb \implies f|d' \tag{4}$$

が成り立つ。(1) より、 $cd|ca, cd|cb$ であるから、(4) で $f = cd$ とおくことにより、

$$cd|d' \tag{5}$$

を得る。

明らかに

$$\boxed{c|ca}, \boxed{c|cb}$$

だから (4) で $f = \boxed{c}$ とおくと、 $c|d'$ を得る。

そこで

$$g = \frac{d'}{c}$$

とおくと、(3) より $g|a, g|b$ を得る。

よって (2) において $e = \boxed{g}$ とおくと、 $g|d$ を得る。したがって

$$d'|cd \tag{6}$$

となる。(5), (6) より $d' = cd$ が成立する。