2008年7月18日

$$\begin{aligned} v_{f(AB)(i)} &= ABv_i \\ &= A(Bv_i) \\ &= Av_{f(B)(i)} \\ &= v_{f(A)(f(B)(i))} \\ &= v_{f(A)\circ f(B)(i)} \end{aligned}$$

よって $f(AB)(i) = f(A) \circ f(B)(i)$ が成り立つ。$i \in \{1,2,3\}$ は任意なので $f(AB) = f(A) \circ f(B)$ が成り立つ。

$a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1$ という規則の下で、a, b を次々とかけることで得られる元は

$$1, a, b, ab, ba, aba$$

のみである。実際、$(ab)^3 = 1$ から、$ababab = 1$ となるが、$a^2 = b^2 = 1$ より、移項することでこれは $aba = bab$ を意味していることになる。長い列でも、a または b が続けばキャンセルすることができ、a, b が交互にあらわれるときは $aba = bab$ を使って a または b を続くようにすることができる。したがって、どんなにたくさん a と b をかけたとしても、この規則の下で書き換えると上の6元のうちのどれかに等しくなってしまう。このことを厳密に議論するために、用語を準備する。

$D \subset X \times X$ から $\hat{D} \subset X \times X$ を作る方法は、推移閉包、 またはグラフの連結成分とも呼ばれる。

例えば、$X = \{1,2,3,4,5\}$, $D = \{(1,2),(3,4),(5,4)\}$ とすると、

$$\hat{D} = \{(x,x) \mid x \in X\} \cup \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}.$$

来週の期末試験には、本、ノート他、何を持ち込んでも良い。