期末試験　2008 年 7 月 25 日

1. A, B を集合とし、f, g を A から B への単射とする。写像 $h : A \times A \to B \times B$ を $h(a_1, a_2) = (f(a_1), g(a_2))$ $((a_1, a_2) \in A \times A)$ によって定義するとき、h は単射であることを示せ。

2. (1) $x^3 + x + 1 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[x]$ は既約であることを示せ。

(2) 体 $K = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[x])/(x^3 + x + 1)$ において、x の属する同値類もまた x と表すことにするとき、$K^\times$ における x の位数を求めよ。

3. a, b を無意味な記号とし、X を a, b からなる有限列全体の集合とする。長さ 0 の列を 1 と書き、これも X の元とみなす。

$$\begin{aligned} D = &\{(w_1 w_2, w_1 a^4 w_2) \mid w_1 \in X,\ w_2 \in X\} \\ &\cup \{(w_1 w_2, w_1 b^4 w_2) \mid w_1 \in X,\ w_2 \in X\} \\ &\cup \{(w_1 w_2, w_1 a^2 b^2 w_2) \mid w_1 \in X,\ w_2 \in X\} \\ &\cup \{(w_1 w_2, w_1 abab^3 w_2) \mid w_1 \in X,\ w_2 \in X\} \end{aligned}$$

とおく。D の推移閉包を $\hat{D}$ とし、$\hat{D}$ によって定義された同値関係を $\sim$ で表す。

(1) $x \in X, y \in X, z \in X, x \sim y \implies xz \sim yz, zx \sim zy$ を示せ。

(2) $b^2 a^2 \sim 1$ を示せ。

(3) $ab^3 \sim ba$ を示せ。

(4) 商集合 $X/\hat{D}$ の元をできるだけ多く、相異なるように列挙せよ。

- 写像 $f : A \to B$ が単射であるとは、

$$\forall a \in A,\ \forall a' \in A,\ f(a) = f(a') \implies a = a'$$

が成り立つときを言う。

- 定数でない多項式 $f(x)$ が既約とは、定数でない 2 つの多項式の積に因数分解できないときを言う。

- A を環とし、$f(x) \in A[x]$ を定数でない多項式とするとき、$A[x]/(f(x))$ は $A[x]$ を同値関係

$$g_1(x) \sim g_2(x) \iff g_1(x) - g_2(x) \text{ は } f(x) \text{ で割り切れる}$$

による商集合に和 $[g_1(x)]+[g_2(x)] = [g_1(x)+g_2(x)]$, 積 $[g_1(x)][g_2(x)] = [g_1(x)g_2(x)]$ を定義して環の構造を定義したものである。

- 体 K に対し、$y \in K^\times$ の位数とは

$$\min\{n \mid n \in \mathbf{N},\ y^n = 1\}$$

である。

- X を集合、$D \subset X \times X$ とするとき、$\hat{D} \subset X \times X$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}\hat{D} = \{&(x,x) \mid x \in X\} \\ &\cup \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in X, \\ &\quad \exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in X,\ x_0 = x,\ x_n = y, \\ &\quad\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ (x_{i-1}, x_i) \in D \text{ or } (x_i, x_{i-1}) \in D\}.\end{aligned}$$

このとき、$\hat{D}$ は同値関係になり、$\hat{D}$ を D の推移閉包と言う。