2011年5月10日の講義の補足説明

- 真＝T, 偽＝F と書く。
- 命題の例としては、「円周率は 3 より大きい。」や、「富士山は日本一高い山である。」など。偽でも良いので、「円周率は 3 より小さい。」も命題である。
- x に関する条件でも、x を強調する必要がないときは p と書く。x を強調する必要がある場合は $p(x)$ と書く。
- 2011年2月に実施された東北大学の学部入試では、次のような問題が出題されている。「$-1 \leqq a \leqq 2$ をみたすすべての a に対し、$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。$-1 \leqq a \leqq 2$ をみたすいずれかの a に対し、$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。」実は、ここには無限個の「かつ」「または」が使われている。
- $\forall x :$ 実数, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$
- $x = 1$ とすると $x^2 - x - 1 = -1 < 0$
- $(\forall x : p(x),\ q(x))$ と書くことにより、$p(x)$ を満たす x のみに対して $\forall$ を適用する、ということを表す。
- $(\exists x :$ 実数, $\quad x^2 - x - 1 > 0)$ であることを確認するためには、例えば $x = 2$ とすればこの不等式が成立する、ということのみ述べれば良い。この命題の否定は $(\exists x :$ 実数, $\quad x^2 - x - 1 \leq 0)$ ではない（これもまた $x = 0$ とすれば真になっている）。否定は
$$\bigl(\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0\bigr)$$
となる。
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} \leq 1$ は真である。
- $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 10,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100}$ も真である。
- $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100}$ も真である。
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \leq \epsilon$ も真である。これが次に定式化する極限の定義である。
- 極限 $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ の定義は
$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数で } n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$
だが、
$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数}, n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon))$$
と書くこともある。

- 一次独立性は

$$\forall c_1, \forall c_2, \ldots, \forall c_k \in \mathbb{R},\ \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{a}_i = 0 \implies (c_1, \ldots, c_k) = (0, \ldots, 0) \right)$$

- A を $m \times n$ 行列とする。このとき、$\operatorname{rank} A$ は、A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

  例えば行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

  の３次小行列式（４通りある）はすべて 0 であり、２次小行列式は例えば左上隅をとれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

  なので、階数は 2 ということがわかる、という意味である。

- 今日の小テストは成績に加味しない。