2011 年 5 月 10 日小テストの解答

定理 1.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank} A = r \\
\iff &\left(\boxed{\exists} B : A \text{ の } r \text{ 次小行列},\ \det B \boxed{\neq} 0\right) \\
&\boxed{\wedge} \left(\boxed{\forall} k \boxed{>} r, \left(\boxed{\forall} B : A \text{ の } k \text{ 次小行列},\ \det B \boxed{=} 0\right)\right).
\end{aligned}
$$

定理 2.

> $f(a)=0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a)=0$ が成り立てば、$g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。

から、まず仮定と結論を抽出して $\implies$ で結ぶと

> ($f(a)=0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a)=0$) $\implies$ ($g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる)

さらに、意味を変えずに順序を変えると

> (任意の複素数 a:$f(a)=0$, $g(a)=0$) $\implies$ (ある正整数 n が存在して $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる)

記号を用いて書き換えると

> $(\forall a \in \mathbb{C}{:}f(a)=0,\ g(a)=0) \implies (\exists n \in \mathbb{N},\ f(x)|g(x)^n)$

次に、$p \implies q$ を $\bar{p} \vee q$ に書き換えて

> $\overline{(\forall a \in \mathbb{C} : f(a)=0,\ g(a)=0)} \vee (\exists n \in \mathbb{N},\ f(x)|g(x)^n)$

$\forall a \in \mathbb{C}:$ の後に書かれている条件を $\implies$ に書き換えて

> $\overline{(\forall a \in \mathbb{C},\ (f(a)=0 \implies g(a)=0))} \vee (\exists n \in \mathbb{N},\ f(x)|g(x)^n)$

この $\implies$ を $\bar{p} \vee q$ に書き換えて

> $\overline{(\forall a \in \mathbb{C},\ (f(a)\neq 0 \vee g(a)=0))} \vee (\exists n \in \mathbb{N},\ f(x)|g(x)^n)$

否定を書き換えて

> $(\exists a \in \mathbb{C},\ \overline{f(a)\neq 0 \vee g(a)=0}) \vee (\exists n \in \mathbb{N},\ f(x)|g(x)^n)$

否定を書き換えて

> $(\exists a \in \mathbb{C},\ (f(a)=0 \wedge g(a)\neq 0)) \vee (\exists n \in \mathbb{N},\ f(x)|g(x)^n)$

これを通常の簡潔な言葉で書き直すと、

> $f(a)=0$ かつ $g(a)\neq 0$ となる複素数 a が存在するか、または $g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。