2011年5月17日

小テストの解説。一般に、整数 k に関する条件 $p(k)$ を満たす k の最大値が r とは、

$$p(r) \wedge \left(\forall k > r,\ \overline{p(k)}\right)$$

と書ける。$p(k)$ として「ある k 次の小行列 B があってその行列式が 0 でない」（その否定は $(\forall B : k$ 次の小行列, $\det B = 0)$ となる）という条件をとることで、定理を論理記号を用いて書き表すことができる。

定理２の意味は次の通り。代数学の基本定理によれば、複素数を係数とする多項式は複素数の範囲で１次式に因数分解される。したがって

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_j)^{m_j}$$

ただし $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ は複素数、$m_1, \ldots, m_j$ は正の整数である。$f(a) = 0 \implies g(a) = 0$ ということは、$g(x)$ は $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ を解に持つということだから、因数定理により $g(x)$ は $x - \alpha_1, \ldots, x - \alpha_j$ で割り切れる。よって

$$g(x) = (x - \alpha_1)^{l_1} \cdots (x - \alpha_j)^{l_j} (x - \beta_1)^{n_1} \cdots (x - \beta_k)^{n_k}$$

という形に書ける。m_i と l_i の大小関係はわからないが、正整数 n を十分大きくとれば（例えば $n = \max\{m_1, \ldots, m_j\}$）、

$$\forall i : 1 \le i \le k,\ m_i \le n l_i$$

が成り立つ。このとき、$f(x) | g(x)^n$ となる。

$$\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0,\ g(a) = 0$$

は、$f(a) = 0$ という付帯条件をみたす複素数 a に限っては、必ず $g(a) = 0$ が成り立つ、という意味である。したがって

$$\forall a \in \mathbb{C}\ (f(a) = 0 \implies g(a) = 0)$$

と書くこともできる。一般に

$$(\forall x \in X : p(x),\ q(x)) = (\forall x \in X,\ (p(x) \implies q(x))).$$

これを用いて、小テスト定理２の条件を「:」を使わずに書き直すことができる。

集合論の教科書でよくある演習問題：$A \cup B = B \iff A \subset B$ は次のようにして証明

できる。

$$
\begin{aligned}
(A \cup B = B) &= \Big(\big(p(x) \lor q(x)\big) \iff q(x)\Big) \\
&= \Big(\big(p(x) \lor q(x)\big) \Longrightarrow q(x)\Big) \land \Big(\big(p(x) \lor q(x)\big) \Longleftarrow q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{\big(p(x) \lor q(x)\big)} \lor q(x)\Big) \land \Big(\big(p(x) \lor q(x)\big) \lor \overline{q(x)}\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \land \overline{q(x)}\big) \lor q(x)\Big) \land \Big(p(x) \lor \big(q(x) \lor \overline{q(x)}\big)\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \land \overline{q(x)}\big) \lor q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \lor q(x)\Big) \land \Big(\overline{q(x)} \lor q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \lor q(x)\Big) \\
&= \Big(p(x) \Longrightarrow q(x)\Big) \\
&= (A \subset B).
\end{aligned}
$$

次が成立する。

$$
\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigcap_{i \in I}(A_i \times B)
$$

$$
\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i \in I}(A_i \times B)
$$

これらを証明するために、一般化された分配法則を用いる。

$$
p \lor (\forall i,\ q_i) = \forall i,\ (p \lor q_i), \tag{1}
$$

$$
p \land (\exists i,\ q_i) = \exists i,\ (p \land q_i) \tag{2}
$$

実際、

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right) \land (y \in B) \\
&\iff (\forall i \in I,\ x \in A_i) \land (y \in B) \\
&\iff \forall i \in I,\ ((x \in A_i) \land (y \in B)) && (\text{(1) より}) \\
&\iff \forall i \in I,\ (x, y) \in A_i \times B \\
&\iff (x, y) \in \bigcap_{i \in I}(A_i \times B),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge (y \in B) \\
&\iff (\exists i \in I,\ x \in A_i) \wedge (y \in B) \\
&\iff \exists i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) \qquad\qquad ((2)\ \text{より}) \\
&\iff \exists i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B \\
&\iff (x,y) \in \bigcup_{i\in I} (A_i \times B),
\end{aligned}
$$

もっと一般に、

$$
\bigcap_{i\in I} \left(\prod_{j\in J} A_{i,j}\right) = \prod_{j\in J} \left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right)
$$

が成り立つ。実際、

$$
\begin{aligned}
(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right) &\iff \forall j \in J,\ x_j \in \bigcap_{i\in I} A_{i,j} \\
&\iff \forall j \in J,\ (\forall i \in I,\ x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall (i,j) \in I \times J,\ x_j \in A_{i,j} \\
&\iff \forall i \in I,\ (\forall j \in J,\ x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall i \in I,\ (x_j)_{j\in J} \in \prod_{i\in I} A_{i,j} \\
&\iff (x_j)_{j\in J} \in \bigcap_{i\in I} \Bigl(\prod_{i\in I} A_{i,j}\Bigr).
\end{aligned}
$$

集合 A のベキ集合 2^A とは、A の部分集合全体からなる集合とする。

$$
2^A = \{B \mid B \subset A\}
$$

例えば、$A = \{1,2,3\}$ のとき、

$$
2^A = \{\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}
$$

である。$\{1,2\} \subset A$, $\{1,2\} \in 2^A$, $\{\{1,2\}\} \subset 2^A$, $\{\{1\},\{2\}\} \subset 2^A$ は真であるが $\{1,2\} \subset 2^A$ は偽である。