

2010年5月17日配布
2010年5月31日提出
2010年6月7日返却

$m, n \in \mathbb{N}$ に対して、集合 $A_{m,n}$ を

$$A_{m,n} = \{x \in \mathbb{N} \mid mx \geq n\}$$

により定義する。このとき、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}$$

を求めよ。

解答例. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{N} &\implies x \geq 1 \\ &\implies nx \geq n \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N}, mx \geq n \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N}, x \in A_{m,n} \\ &\implies x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n}. \end{aligned}$$

だから

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n}. \quad (1)$$

一方、明らかに、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n}. \quad (2)$$

(1) と (2) より

$$\mathbb{N} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n}.$$

よって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n} = \mathbb{N}.$$

$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}x \in \mathbb{N} &\implies mx + 1 \in \mathbb{N}, mx < mx + 1 \\&\implies \exists n \in \mathbb{N}, mx < n \\&\implies \exists n \in \mathbb{N}, x \notin A_{m,n} \\&\implies \overline{\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_{m,n}} \\&\implies x \in \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}} \\&\implies x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}\end{aligned}$$

だから

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \subset \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}}. \quad (3)$$

一方、明らかに、

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \supset \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}}. \quad (4)$$

(3) と (4) より

$$\mathbb{N} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}}.$$

すなわち

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = \emptyset.$$

よって

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = \emptyset.$$