2011年5月31日

一般に集合 A, B に対し、B^A を、

$$B^A = \prod_{a \in A} B$$

と定義し、B^A の元を A から B への写像という。B^A の元は $(b_a)_{a \in A}$ と書くが、これは A の各元 a に対して B の元 b_a が定まっている、ということになる。このように書くかわりに、$b_a = f(a)$ と書いて、$f : A \to B$ を A から B への写像というのが普通である。写像 $f : A \to B$ に対して、A を f の定義域、B を f の値域という。

写像の概念は前回出した宿題の中でも重要な役割を演じている。

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j}$$

は成り立たない（宿題参照）。例えば

$$A = \bigcap_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{3} A_{i,j}$$

を考えてみる。$x \in A$ は

$$(\exists j \in \{1, 2, 3\},\ x \in A_{1,j}) \land (\exists j \in \{1, 2, 3\},\ x \in A_{2,j})$$

と同値である。例えば、$x \in A_{i,j}$ が

$i = 1$	F	T	F	T
$i = 2$	T	F	F	T

で表されているとき、$i = 1$ は1行の $\lor$ をとるので T, $i = 2$ は2行の $\lor$ をとるので T これを $i = 1, 2$ に関して $\land$ をとって T となる。一方、

$$B = \bigcup_{j=1}^{3} \bigcap_{i=1}^{2} A_{i,j}$$

とおくと $x \in B$ は

$$(\forall i \in \{1, 2\},\ x \in A_{i,1}) \lor (\forall i \in \{1, 2\},\ x \in A_{i,2}) \lor (\forall i \in \{1, 2\},\ x \in A_{i,3})$$

と同値である。例えば、$x \in A_{i,j}$ が上の表で表されているとき

$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
F	T	F
T	F	F
F	F	F

$j=1$ は1列の $\wedge$ をとるので F, $j=2$ は2列の $\wedge$ をとるので F, $j=3$ は3列の $\wedge$ をとるので F, これを $j=1,2,3$ に関して $\vee$ をとって F となる。

さて、上の A を一般化して

$$A=\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_{i,j}$$

を考えると $x\in A$ は

$$\exists j\in J,\ x\in A_{i,j}$$

を i に関して「かつ」で結んだものになる。しかしこの j は i によって異なっても良いので、j_i と書くことにすると

$$\forall i\in I,\ (\exists j_i\in J,\ x\in A_{i,j_i})$$

となる。$(j_i)_{i\in I}$ は J^I の元、すなわち I から J への写像と考えることができる。すると $x\in A$ は

$$\exists f\in J^I,\ \forall i\in I,\ x\in\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)}$$

となる。したがって

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}A_{i,j}=\bigcup_{f\in J^I}\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)}$$

となる。

このことは因数分解と展開の関係と比べてみるとわかりやすい。

$$(a_{11}+a_{12}+a_{13})(a_{21}+a_{22}+a_{23})$$

を展開すると全部で9個の項からなる式になる。これは、$i=1$ について $j=1,2,3$ のどれか j_1 を選び、$i=2$ についても $j=1,2,3$ についてのどれか j_2 を選んで積 $a_{1,j_1}a_{2,j_2}$ を作っているのだから、展開すると $\{1,2,3\}^{\{1,2\}}$ に対応して項ができる。一般には

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{f\in J^I}\prod_{i=1}^{m}a_{i,f(i)}$$

となる。ただし $I=\{1,\ldots,m\}$, $J=\{1,\ldots,n\}$ である。

積と和、和集合と交わりの役割を入れ替えたらどうなるか考えてみよ。

$$\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}a_{i,j}=\prod_{f\in J^I}\sum_{i=1}^{m}a_{i,f(i)},$$

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}A_{i,j}=\bigcap_{f\in J^I}\bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)}$$

は成り立つか？

$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ とは自然に対応がある。$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ を $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、$f(x, y) = x + \sqrt{-1}y$ で定義すると、xy 平面と複素数平面が f によって同一視される。同一視されるとはどういう意味か。これを説明するために

- $f : A \to B$ が全射とは $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$
- $f : A \to B$ が単射とは $\forall a \in A, \forall a' \in A, (f(a) = f(a') \implies a = a').$
- $f : A \to B$ が全単射とは f が全射かつ単射のときをいう。

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, f(x, y) = x + \sqrt{-1}y$ は全単射。

$f : A \to B, g : B \to C$ に対して、合成写像 $g \circ f : A \to C$ が $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ により定義できる。

- $g \circ f$ が単射ならば f は単射。
- $g \circ f$ が全射ならば g は全射。

$X \subset A, f : A \to B$ とするとき、

$$\bigcup_{x \in X} \{f(x)\}$$

を $\{f(x) \mid x \in X\}$ または $f(X)$ と書き、f による X の像という。したがって

$$b \in \{f(x) \mid x \in X\} \iff \exists x \in X,\ b = f(x).$$

一般に、$p(x)$ が x に関する条件のとき、$\{f(x) \mid p(x)\}$ という集合が定義できる。y がこの集合に属するかどうかは、

$$\exists x : p(x),\ y = f(x)$$

という y に関する条件が満たされるかどうかで決まるからである。この記法は、集合を定義するときに便利である。例えば、自然数の平方数全体は

$$\{x \mid x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x = y^2\}$$

これをもっと簡単に、

$$\{y^2 \mid y \in \mathbb{N}\}$$

と書くことができる。

また、$Y \subset B$ に対し、$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A,\ f(a) \in Y\}$ を f による Y の逆像という。

- $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$,
- $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$,
- $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$,
- $X \subset f^{-1}(f(X))$,
- $Y \cap f(A) = f(f^{-1}(Y))$.

恒等写像 $\mathrm{id}_A : A \to A$ とは、$\forall a \in A, \mathrm{id}_A(a) = a$ を満たす写像。$f : A \to B$ に対して、$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たす $g : B \to A$ を f の逆写像といい、$g = f^{-1}$ と書く。f が逆写像をもつとき、$Y \subset B$ に対して $f^{-1}(Y)$ は2通りに定義されていることに注意。実は2つの定義は同じになる。

f が逆写像をもたなくても、f の値域の部分集合 Y に対して、$f^{-1}(Y)$ は上に定義された逆像として意味を持つので、f の値域の元 b に対して $f^{-1}(\{b\})$ は

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{b\}) &= \{a \mid a \in A,\ f(a) \in \{b\}\} \\ &= \{a \mid a \in A,\ f(a) = b\} \end{aligned}$$

という集合になる。

f が逆写像を持つときは、$f(a) = b$ となる a は $f^{-1}(b)$ としてただひとつ存在するので、$f^{-1}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$ となる。

f が逆写像を持たないときは、$f^{-1}(b)$ が定義できないので、$f^{-1}(b)$ と書くことは誤りである。