2011年6月7日

写像 $f : A \to B$ とは、関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を一般化したもので、関数と同様にグラフが定義できる。写像 $f : A \to B$ に対して、A を f の定義域といい、

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

を f のグラフという。

写像はそのグラフを定めることによって定めることもできる。写像のグラフ $G \subset A \times B$ は条件

$$\forall a \in A,\ G \cap (\{a\} \times B) \text{ はちょうどひとつの元からなる} \tag{1}$$

を満たし、逆にこの条件を満たす $G \subset A \times B$ はある写像のグラフである。上の条件 (1) を略記するために、$\exists!$ という記号を用いる：

$$\forall a \in A,\ \exists! b \in B,\ (a, b) \in G. \tag{2}$$

有限集合とは、

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists f : \{1, 2, \ldots, n\} \to X,\ f \text{ は全単射}$$

を満たす集合 X のこと。このような n を $|X|$ で表す。これを否定したのが無限集合の定義となる。$\mathbb{N}$ は無限。$\mathbb{N}$ を含む集合は無限。

$f : A \to B$ を有限集合 A から B への写像とする。このとき、f が全射ならば $|A| \geq |B|$ であり、f が単射ならば $|A| \leq |B|$ である。特に、f が全単射ならば $|A| = |B|$ である。逆に、$|A| = |B|$ のとき、f が単射または全射ならば全単射である。

有限集合に対して次の等式が成り立つ。

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A||B|$
- $|B^A| = |B|^{|A|}$
- $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ if $A_i \cap A_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$ (disjoint と言う)

X, Y を無限集合とするとき、

$$\exists f : X \to Y,\ f \text{ は全射 のとき } |X| \geq |Y|, \tag{3}$$
$$\exists f : X \to Y,\ f \text{ は単射 のとき } |X| \leq |Y|, \tag{4}$$
$$\exists f : X \to Y,\ f \text{ は全単射 のとき } |X| = |Y|, \tag{5}$$
$$|X| \geq |Y| \text{ だが } |X| = |Y| \text{ ではないとき } |X| > |Y|, \tag{6}$$
$$|X| \leq |Y| \text{ だが } |X| = |Y| \text{ ではないとき } |X| < |Y| \tag{7}$$

と書く。無限集合 X, Y について $|X|, |Y|$ は現段階では定義されていないことに注意。上は「$|X| \geq |Y|$」「$|X| \leq |Y|$」「$|X| = |Y|$」「$|X| > |Y|$」「$|X| < |Y|$」の定義をしているに過ぎない。したがって、無限集合 $|X|, |Y|$ について、$|X| \geq |Y| \iff |Y| \leq |X|$ は自明ではない。(3)–(7) は X, Y が有限集合のときも成り立つ。

- シュレーダー・ベルンシュタインの定理：$|X| \geq |Y|$ かつ $|X| \leq |Y|$ ならば $|X| = |Y|$.

- カントールの定理：$|X| < |2^X|$.

これらは X, Y が有限集合のときは明らかに成り立つ。無限集合のときの証明が難しい。

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ をそれぞれ集合 X から Y, Y から Z への写像とする。f, g がともに全射であれば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も全射、f, g がともに単射であれば $g \circ f$ も単射となる。したがって、

- $|X| \geq |Y|$ かつ $|Y| \geq |Z| \implies |X| \geq |Z|$

- $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z| \implies |X| \leq |Z|$

$S \subset A \times B$ のとき、

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{a \in A} |\{b \mid b \in B,\ (a, b) \in S\}| \\ &= \sum_{b \in B} |\{a \mid a \in A,\ (a, b) \in S\}| \end{aligned}$$

例えば、A を正二十面体の面の集合、B を正二十面体の頂点の集合、とし、$S \subset A \times B$ を、$a \ni b$ を満たす組 (a, b) 全体とする。各面は正三角形なので、$|S| = 3|A| = 60$ である。一方、各頂点には 5 つの正三角形が集まっているので、$|S| = 5|B|$ である。よって $|B| = 12$ となる。

A, B を有限集合とし、$|A| = k$, $|B| = n$ とする。A から B への単射全体の集合を X とすると、

$$|X| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

となる。これは n 個から k 個とる順列のことである。特に、$k = n$ のとき、単射は必ず全単射となり、その個数は $n!$ となる。一般に有限集合 A から A への全単射を置換という。

k を $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とするとき、

$$\binom{B}{k} = \{X \mid X \subset B,\ |X| = k\}.$$

と定義する。このとき、

$$\left|\binom{B}{k}\right| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

であり、これを

$$\binom{n}{k}$$

と書く。