

2011年6月7日

空集合も有限集合に含める。

$S \subset A \times B$ を2通りの方法で数えることを double counting という。

$$\binom{B}{k} = \{X \mid X \subset B, |X| = k\}.$$

は B choose k と読む。 B の k (点) 部分集合全体、などという。

$$\binom{n}{k}$$

も n choose k と読む。これを二項係数という。

$|A| = k \leq n = |B|$ とし、

$$S = \{(f, X) \mid f: A \rightarrow B \text{ 単射}, f(A) = X\}$$

とにおいて S に double counting を適用すると

$$\begin{aligned} S &= \sum_{f: A \rightarrow B \text{ 単射}} \{X \mid f(A) = X\} \\ &= \sum_{f: A \rightarrow B \text{ 単射}} 1 \\ &= |\{f: A \rightarrow B \text{ 単射}\}| \\ &= n(n-1) \cdots (n-k+1), \\ S &= \sum_{X \in \binom{B}{k}} |\{f: A \rightarrow B \text{ 単射} \mid f(A) = X\}| \\ &= \sum_{X \in \binom{B}{k}} |\{f: A \rightarrow X \text{ 全単射}\}| \\ &= \sum_{X \in \binom{B}{k}} k! \\ &= k! \left| \binom{B}{k} \right| \end{aligned}$$

となるので、

$$\left| \binom{B}{k} \right| = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$