2011 年 6 月 7 日配布
2011 年 6 月 14 日提出
2011 年 6 月 28 日返却

r を正の整数とし、$A_1, \ldots, A_r$ を有限集合 X の部分集合とする。次の 3 つの不等式 **1.** **2.** を r に関する帰納法により示せ。ただし、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1}$$

は自由に用いて良い。

1. $r \geq 1$ に対して、$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| \leq \sum_{i=1}^{r} |A_i|$.

$r = 1$ のときは自明。$r \geq 2$ として、$r-1$ で正しいとすると

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{r} A_i| &= |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cup A_r| = |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| \qquad (2) \\ &\leq |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|. \end{aligned}$$

2. $r \geq 2$ に対して、$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| \geq \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j|$.

$r = 2$ のときは (1) より明らか。$r \geq 3$ として、$r-1$ で正しいとすると

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{r} A_i| &= |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| && \text{((2) より)} \\ &= |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |\bigcup_{i=1}^{r-1} (A_i \cap A_r)| \\ &\geq |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - \sum_{i=1}^{r-1} |A_i \cap A_r| && \text{(\textbf{1.} より)} \\ &\geq \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} |A_i \cap A_j| + |A_r| - \sum_{i=1}^{r-1} |A_i \cap A_r| && \text{(帰納法の仮定より)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j|. \end{aligned}$$

3. A, B を有限集合とし、$f : A \to B$ を全射とする。このとき、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \forall b \in B,\ f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset \tag{3}$$

であることを用いて $|A| \geq |B|$ となることを証明せよ。

$$\begin{aligned}
|A| = |f^{-1}(B)| = |\bigcup_{b \in B} f^{-1}(\{b\})| \\
&= \sum_{b \in B} |f^{-1}(\{b\})| \\
&\geq \sum_{b \in B} 1 && \text{((3) より)} \\
&= |B|.
\end{aligned}$$