

2011年6月28日配布
2011年7月5日提出
2011年7月12日返却

A を有限集合とし、 A のべき集合 2^A に、包含関係 $B \subset C$ ($B, C \in 2^A$) で順序関係を定義する。 $B \subset C$ のとき、 2^A における Möbius 関数 μ の (B, C) での値は、 $|C| - |B|$ に関する帰納法により $(-1)^{|C-B|}$ となることを示せ。

$$\begin{aligned}\mu(B, C) &= - \sum_{B \subset D \subsetneq C} (-1)^{|D|-|B|} \\ &= - \sum_{\substack{E \in 2^{C-B} \\ E \neq C-B}} (-1)^{|E|} \\ &= - \sum_{i=0}^{|C-B|-1} \sum_{E \in \binom{C-B}{i}} (-1)^{|E|} \\ &= - \sum_{i=0}^{|C-B|-1} \binom{|C-B|}{i} (-1)^i \\ &= -((1-1)^{|C-B|} - (-1)^{|C-B|}) \\ &= (-1)^{|C-B|}\end{aligned}$$