

2011年7月5日配布  
2011年7月12日提出  
2011年7月19日返却

1.

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X, ad = bc\}$$

とおくと、 $R$  は  $X$  上の同値関係になる。 $R$  による商集合  $X/R$  に演算  $+$  を次のように定義する。

$$+ : (X/R) \times (X/R) \rightarrow X/R, +([a, b], [c, d]) = [ad + bc, bd].$$

この写像  $+$  は well-defined であることを示せ。

$[a, b] = [a', b'], [c, d] = [c', d']$  とすると  $ab' = ba', cd' = dc'$ . よって

$$\begin{aligned}(ad + bc)(b'd') &= ab'dd' + bb'cd' \\ &= ba'dd' + bb'dc' \\ &= (a'd' + b'c')(bd)\end{aligned}$$

となるので  $[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd']$ .

2.  $m$  を正の偶数とし、写像  $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  を次のように定義することができる。

$$f([a]) = [a^2].$$

ただし、 $[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, [a^2] \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  である。この写像  $f$  は well-defined であることを示せ。

$m$  が奇数のときはどうか。

$$\begin{aligned}[a] = [a'] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\implies m \mid (a - a') \\ &\implies m \mid (a - a'), 2 \mid (a - a') && (m \text{ は偶数だから}) \\ &\implies m \mid (a - a'), 2 \mid ((a - a') + 2a') \\ &\implies m \mid (a - a'), 2 \mid (a + a') \\ &\implies 2m \mid (a - a')(a + a') \\ &\implies 2m \mid (a^2 - a'^2) \\ &\implies [a^2] = [a'^2] \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$m$  が奇数のとき、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  において  $[0] = [m]$  だが  $m^2$  は  $2m$  で割り切れないので  $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  において  $[0] \neq [m^2]$  である。よって  $m$  が奇数のときは well-defined とは言えず、上の写像  $f$  は定義できない。