2011 年 7 月 12 日配布
2011 年 7 月 19 日提出
2011 年 7 月 26 日返却

1.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

とし、$a_0 \neq 0$ とする。このとき

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \in \mathbb{R}[[x]]$$

が $fg = 1$ をみたすように $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めよ。

帰納的に

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_k &= -a_0^{-1} \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と定義する。このとき

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m x^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} x^k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_0 b_k + \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n}) x^k \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. $f, g \in \mathbb{R}[[x]]$, $f \neq 0$ とするとき、ある非負整数 k と $h \in \mathbb{R}[[x]]$ が存在して、$\mathbb{R}[[x]]$ の商体において、

$$\frac{g}{f} = \frac{h}{x^k}$$

となることを示せ。

$f \neq 0$ だから、

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

と書くと、

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq 0\} \neq \emptyset$$

である。k を左辺の最小値とすると、$a_k \neq 0$ であり、

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n. \end{aligned}$$

$a_k \neq 0$ だから前問より、ある $f' \in \mathbb{R}[[x]]$ が存在して

$$f' \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n = 1$$

をみたす。すると

$$f' f = x^k.$$

そこで、

$$h = g f'$$

とおくと $h \in \mathbb{R}[[x]]$ であり、

$$\begin{aligned} g x^k &= g(f' f) \\ &= (g f') f \\ &= h f \end{aligned}$$

だから

$$\frac{g}{f} = \frac{h}{x^k}.$$