

2011年7月19日

ユークリッドの互除法の例。736 と 100 の最大公約数を求める。

$$736 = 100 \times 7 + 36,$$

$$100 = 36 \times 2 + 28,$$

$$36 = 28 \times 1 + 8,$$

$$28 = 8 \times 3 + 4,$$

$$8 = 4 \times 2 + 0.$$

この計算から 736 と 100 の GCD が 4 であることがわかる。実際、下から上に見て行くことにより、4 が 736 と 100 の約数であることがわかる。さらに、

$$\begin{aligned} 4 &= 28 - 8 \times 3 \\ &= 28 - (36 - 28 \times 1) \times 3 \\ &= 4 \cdot 28 - 36 \cdot 3 \\ &= 4 \cdot (100 - 36 \times 2) - 36 \cdot 3 \\ &= 4 \cdot 100 - 36 \cdot 11 \\ &= 4 \cdot 100 - (736 - 100 \times 7) \cdot 11 \\ &= 81 \cdot 100 - 11 \cdot 736 \end{aligned}$$

となるので、100 と 736 の公約数は  $81 \cdot 100 - 11 \cdot 736 = 4$  の約数である。

$K$  を体とし、 $f$  を  $K[x]$  における既約多項式、 $I = (f)$  を  $K[x]$  のイデアルとすると剰余環  $K[x]/I$  は体である。すなわち、 $K[x]/I$  の 0 でない元は逆元を持つ。実際、

$$\begin{aligned} [a] \neq [0] &\iff f \nmid a \\ &\iff \gcd(a, f) = 1 \\ &\iff \exists s, t \in K[x], sa + tf = 1 \\ &\implies \exists s \in K[x], [s][a] = [1]. \end{aligned}$$