2011年8月2日

復習（2011年5月31日より）

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{f\in J^I}\prod_{i=1}^{m}a_{i,f(i)}$$

ただし $I=\{1,\ldots,m\}$, $J=\{1,\ldots,n\}$ である。

復習（2011年7月26日より）

n を正整数とするとき、正整数の列 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ が n の分割であるとは、次の条件をみたすときをいう。

(1) $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=n$,

(2) $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_k$.

$p(n)$ で n の分割の総数を表すと、

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}.$$

ただし、$p(0)=1$ とする。すると、$p(n)$ の間の関係式がわかる。

$$\sum_{m=0}^{n}q_m p(n-m)=0,\quad \text{ただし}\ \sum_{m=0}^{\infty}q_m x^m=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i).$$

$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ の展開

$\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ を求めるために、$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ を展開する。$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ における x^n の係数は $\prod_{i=1}^{n}(1-x^i)$ における x^n の係数に等しく、

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(1-x^i)&=\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}(-x^i)^j\\&=\sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}}\prod_{i=1}^{n}(-x^i)^{f(i)}\\&=\sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}}(-1)^{\sum_{i=1}^{n}f(i)}x^{\sum_{i=1}^{n}if(i)}\\&=\sum_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{0,1\}}(-1)^{|\{i|f(i)=1\}|}x^{\sum_{i=1}^{n}if(i)}\end{aligned}$$

における x^n の係数は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}\\ \sum_{i=1}^n if(i)=n}} (-1)^{|\{i|f(i)=1\}|}\\
&= \sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}\\ \sum_{i=1}^n if(i)=n\\ |\{i|f(i)=1\}|\text{ は偶数}}} 1 + \sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}\\ \sum_{i=1}^n if(i)=n\\ |\{i|f(i)=1\}|\text{ は奇数}}} (-1)\\
&= |\{f \mid f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\},\ \sum_{i=1}^n if(i)=n,\ |\{i \mid f(i)=1\}| \text{ は偶数 }\}|\\
&\quad - |\{f \mid f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\},\ \sum_{i=1}^n if(i)=n,\ |\{i \mid f(i)=1\}| \text{ は奇数 }\}|
\end{aligned}
$$

そこで

$$
\begin{aligned}
E_n &= \{(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \mid \lambda_1 > \cdots > \lambda_k > 0,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = n,\ k \text{ は偶数 }\},\\
O_n &= \{(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \mid \lambda_1 > \cdots > \lambda_k > 0,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = n,\ k \text{ は奇数 }\}
\end{aligned}
$$

とおくと

$$q_n = |E_n| - |O_n|.$$

例えば、$E_6 = \{(5,1),(4,2)\}$, $O_6 = \{(6),(3,2,1)\}$, $q_6 = 0$.

$\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in E_n \cup O_n$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&s(\lambda) = \lambda_k,\\
&t(\lambda) = \max\{t \mid \forall i : 1 \le i \le t,\ \lambda_i = \lambda_1 - i + 1\}
\end{aligned}
$$

と定義し、$\lambda^* = (\lambda_1^*,\dots,\lambda_l^*)$ を次で定義する。$s(\lambda) \le t(\lambda)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&l = k-1,\\
&\lambda_i^* = \begin{cases} \lambda_i + 1 & (1 \le i \le s(\lambda)),\\ \lambda_i & (s(\lambda) < i \le k-1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$s(\lambda) > t(\lambda)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&l = k+1,\\
&\lambda_i^* = \begin{cases} \lambda_i - 1 & (1 \le i \le t(\lambda)),\\ \lambda_i & (t(\lambda) < i \le k),\\ t(\lambda) & i = k+1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$E'_n = \begin{cases} E_n - \{(2k-1,\dots,k)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k-1),\ k \text{ は偶数}), \\ E_n - \{(2k+1,\dots,k+1)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k+1),\ k \text{ は偶数}), \\ E_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$O'_n = \begin{cases} O_n - \{(2k-1,\dots,k)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k-1),\ k \text{ は奇数}), \\ O_n - \{(2k+1,\dots,k+1)\} & (n = \frac{1}{2}k(3k+1),\ k \text{ は奇数}), \\ O_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと、$\lambda \mapsto \lambda^*$ は全単射 $E'_n \to O'_n$ を与える。特に $|E'_n| = |O'_n|$ となるので

$$\begin{aligned} q_n &= |E_n| - |O_n| \\ &= \begin{cases} |E'_n| + 1 - |O'_n| & (n = \frac{1}{2}k(3k\pm 1),\ k \text{ は偶数}), \\ |E'_n| - (|O'_n| + 1) & (n = \frac{1}{2}k(3k\pm 1),\ k \text{ は奇数}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^k & (n = \frac{1}{2}k(3k\pm 1)), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \end{aligned}$$

例えば、

$$(q_0, q_1, \dots, q_{10}) = (1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$$

となるので

$$\begin{aligned} p(10) &= -\sum_{i=0}^{9} q_{10-i}p(i) = -(-p(9) - p(8) + p(5) + p(3)), \\ p(9) &= -\sum_{i=0}^{8} q_{9-i}p(i) = -(-p(8) - p(7) + p(4) + p(2)), \\ p(8) &= -\sum_{i=0}^{7} q_{8-i}p(i) = -(-p(7) - p(6) + p(3) + p(1)), \\ p(7) &= -\sum_{i=0}^{6} q_{7-i}p(i) = -(-p(6) - p(5) + p(2) + p(0)), \\ p(6) &= -\sum_{i=0}^{5} q_{6-i}p(i) = -(-p(5) - p(4) + p(1)), \\ p(5) &= -\sum_{i=0}^{4} q_{5-i}p(i) = -(-p(4) - p(3) + p(0)) \end{aligned}$$

ここに $p(0) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ を代入して $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(7) = 15$, $p(8) = 22$, $p(9) = 30$, $p(10) = 42$ を得る。