2012年4月10日

命題とは、式や文章で表された事柄で、正しい（真）か正しくない（偽）か明確に定まるもの。

文字（x など）を含んだ命題で、x の値によって真偽が変わるものを（x に関する）条件という。

- 条件 p の否定を $\bar{p}$ と書く。明らかに $\bar{\bar{p}} = p$
- $p \wedge q$ （“p and q,” “p かつ q” とも書く）
- $p \vee q$ （“p or q,” “p または q” とも書く）
- $(\bar{p} \vee q)$ を $(p \implies q)$ と書く。
- $((p \implies q) \wedge (q \implies p))$ を $p \iff q$ と書く。
- $p \implies q$ が成り立つとき p を q の十分条件、q を p の必要条件という。
- $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $(p \implies q) = (\bar{q} \implies \bar{p})$ （対偶）
- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

次の命題

すべての実数 x に対し、$x^2 \geq 0$ である

は、無限個の命題を $\wedge$ で結んだものと考えられる。一般に、$q(x)$ を x に関する条件とするとき、

$$\forall x, \quad q(x)$$

によって、想定されるすべての x について $q(x)$ が真である、ということを表すが、「想定される」x を条件 $p(x)$ によって規定するときには

$$\forall x : p(x), \quad q(x)$$

と書く。例えば

$$\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x + 1 > 0$$

は真であるが、

$$\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 > 0$$

は偽である。一方、

$$\exists x, \quad p(x)$$

によって、想定されるどれかの x について $p(x)$ が真である、ということを表す。「$p(x)$ を満たす x が存在する」または「ある x に対して $p(x)$ が成り立つ」と読む。

　また、詳しくは次回紹介するが、「集合」を用いることで「$\forall x$: 実数」を「$\forall x \in \mathbb{R}$」と書くことができる。例えば

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 1 > 0$$

は真であり、

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0$$

も真である。

　同様に、正整数の集合は $\mathbb{N}$, 整数の集合は $\mathbb{Z}$, 有理数の集合は $\mathbb{Q}$, 複素数の集合は $\mathbb{C}$ で表す。

- $\left(\overline{\forall x,\ p(x)}\right) = \left(\exists x,\ \overline{p(x)}\right)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} \leq 1$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \left(\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0,\ \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{1000}\right)$

　極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の定義は

$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$

　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を $\mathbb{R}^n$ のベクトルとする。これらが一次独立とは

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{a}_i = 0 \text{ となるのは } (c_1, c_2, \ldots, c_k) = (0, 0, \ldots, 0) \text{ のときに限る}$$

が成り立つときをいう。これを論理記号 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ などを用いて書き直してみよ。また一次独立でない（一次従属という）という条件をこれらの記号で書き表してみよ。

定理 1. A を $m \times n$ 行列とする。このとき、$\operatorname{rank} A$ は、A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

定理 2. $f(x), g(x)$ を複素数を係数に持つ x の多項式とする。$f(a) = 0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a) = 0$ が成り立てば、$g(x)$ を何乗かすると $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。

　これらの定理を論理記号を用いて書き表してみよ。