2012年4月10日の講義の補足説明

センター入試問題では、「条件」「命題」という言葉が使われている。p, q は a, b に関する条件だが、$p \implies q$ はなぜ命題と言えるか、その理由は明確には書かれていない。このことをきちんと説明するには、$\forall$ という記号が必要である。高校でこの記号は教えないのだが、概念そのものは修得しておかなければ大学入試問題を解くことはできないのである。

- 真＝T, 偽＝F と書く。
- 命題の例としては、「円周率は 3 より大きい。」や、「富士山は日本一高い山である。」など。偽でも良いので、「円周率は 3 より小さい。」も命題である。
- x に関する条件でも、x を強調する必要がないときは p と書く。x を強調する必要がある場合は $p(x)$ と書く。
- 2011 年 2 月に実施された東北大学の学部入試では、次のような問題が出題されている。「$-1 \leqq a \leqq 2$ をみたすすべての a に対し、$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。$-1 \leqq a \leqq 2$ をみたすいずれかの a に対し、$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。」実は、ここには無限個の「かつ」「または」が使われている。
- $\forall x :$ 実数, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$
- $x = 1$ とすると $x^2 - x - 1 = -1 < 0$
- $(\forall x : p(x),\ q(x))$ と書くことにより、$p(x)$ を満たす x のみに対して $\forall$ を適用する、ということを表す。
- $(\exists x :$ 実数, $\quad x^2 - x - 1 > 0)$ であることを確認するためには、例えば $x = 2$ とすればこの不等式が成立する、ということのみ述べれば良い。この命題の否定は $(\exists x :$ 実数, $\quad x^2 - x - 1 \leq 0)$ ではない（これもまた $x = 0$ とすれば真になっている）。否定は
$$\big(\forall x : \text{実数}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0\big)$$
となる。
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} \leq 1$ は真である。
- $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 10,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100}$ も真である。
- $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{100}$ も真である。
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0,\ \frac{1}{n} \leq \epsilon$ も真である。これが次に定式化する極限の定義である。

- 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の定義は

$$\forall\varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数で}\ n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$

だが、

$$\forall\varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数}, n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon))$$

と書くこともある。かっこがついていることからわかる通り、$\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0$: 正整数, $\forall n$: 正整数 の順序を入れ替えてはいけない。極限の定義自体は、数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 a が与えられたときに命題となるが、

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$

は ε に関する条件であり、その中に入っている

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon)$$

は ε, n_0 に関する条件さらに、

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

は ε, n に関する条件である。したがって、例えば$\forall\varepsilon > 0$ のようなものが前についたとき初めて命題として真偽が定まる。

- 一次独立性は

$$\forall c_1, \forall c_2, \ldots, \forall c_k \in \mathbb{R},\ \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{a}_i = 0 \implies (c_1, \ldots, c_k) = (0, \ldots, 0)\right)$$

- A を $m \times n$ 行列とする。このとき、$\operatorname{rank} A$ は、A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

例えば行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

の３次小行列式（４通りある）はすべて 0 であり、２次小行列式は例えば左上隅をとれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

なので、階数は 2 ということがわかる、という意味である。

- 多項式 $G(x)$ が $F(x)$ で割り切れるとき $F(x)|G(x)$ と書く。

- 今日の小テストは成績に加味しない。