

2012年4月10日小テストの解答

定理 1.

$$\begin{aligned} \text{rank } A = r \\ \iff \left(\exists B : A \text{ の } r \text{ 次小行列, } \det B \neq 0 \right) \\ \wedge \left(\forall k > r, \left(\forall B : A \text{ の } k \text{ 次小行列, } \det B = 0 \right) \right). \end{aligned}$$

定理 2.

$f(a) = 0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a) = 0$ が成り立てば、 $g(x)$ を何乗かすると $f(x)$ で割り切れる。

から、まず仮定と結論を抽出して \implies で結ぶと

$(f(a) = 0 \text{ なる任意の複素数 } a \text{ に対して } g(a) = 0) \implies (g(x) \text{ を何乗かすると } f(x) \text{ で割り切れる})$

さらに、意味を変えずに順序を変えると

$(\text{任意の複素数 } a : f(a) = 0, g(a) = 0) \implies (\text{ある正整数 } n \text{ が存在して } g(x)^n \text{ が } f(x) \text{ で割り切れる})$

記号を用いて書き換えると

$$(\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0, g(a) = 0) \implies (\exists n \in \mathbb{N}, f(x) | g(x)^n)$$

次に、 $p \implies q$ を $\bar{p} \vee q$ に書き換えて

$$\overline{(\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0, g(a) = 0)} \vee (\exists n \in \mathbb{N}, f(x) | g(x)^n)$$

$\forall a \in \mathbb{C}$: の後に書かれている条件を \implies に書き換えて

$$\overline{(\forall a \in \mathbb{C}, (f(a) = 0 \implies g(a) = 0))} \vee (\exists n \in \mathbb{N}, f(x) | g(x)^n)$$

この \implies を $\bar{p} \vee q$ に書き換えて

$$\overline{(\forall a \in \mathbb{C}, (f(a) \neq 0 \vee g(a) = 0))} \vee (\exists n \in \mathbb{N}, f(x) | g(x)^n)$$

否定を書き換えて

$$(\exists a \in \mathbb{C}, \overline{f(a) \neq 0 \vee g(a) = 0}) \vee (\exists n \in \mathbb{N}, f(x) | g(x)^n)$$

否定を書き換えて

$$(\exists a \in \mathbb{C}, (f(a) = 0 \wedge g(a) \neq 0)) \vee (\exists n \in \mathbb{N}, f(x) | g(x)^n)$$

これを通常の簡潔な言葉で書き直すと、

$f(a) = 0$ かつ $g(a) \neq 0$ となる複素数 a が存在するか、または $g(x)$ を何乗かすると $f(x)$ で割り切れる。