

2012年4月17日

前回の小テストの解説

一般に、整数 k に関する条件 $p(k)$ を満たす k の最大値が r とは、

$$p(r) \wedge \overline{p(r+1)} \wedge \overline{p(r+2)} \wedge \cdots$$

すなわち

$$p(r) \wedge \left(\forall k > r, \overline{p(k)} \right)$$

と書ける。 $p(k)$ として「ある k 次の小行列 B があってその行列式が 0 でない」（その否定は $(\forall B : k \text{ 次の小行列}, \det B = 0)$ となる）という条件をとることで、定理を論理記号を用いて書き表すことができる。

もっとわかりやすい例では、例えば、人手のいる仕事があり、その仕事を完了するには、 $r+1$ 人いれば良いとする。 $\det B = 0$ を「仕事が終わる」と読み替えることで、この命題は次の命題と同じであることがわかる。

r 人集まったのでは、メンバーによっては仕事が終わらないこともあり得るが、 $r+1$ 人以上いれば必ず仕事が終わる。

ここで、「必ず」が \forall に解釈され、「こともあり得る」が \exists に解釈されていることに注意。

定理 2 の意味は次の通り。代数学の基本定理によれば、複素数を係数とする多項式は複素数の範囲で 1 次式に因数分解される。したがって

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_j)^{m_j}$$

ただし $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ は複素数、 m_1, \dots, m_j は正の整数である。 $f(a) = 0 \implies g(a) = 0$ ということは、 $g(x)$ は $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ を解に持つということだから、因数定理により $g(x)$ は $x - \alpha_1, \dots, x - \alpha_j$ で割り切れる。よって

$$g(x) = (x - \alpha_1)^{l_1} \cdots (x - \alpha_j)^{l_j} (x - \beta_1)^{n_1} \cdots (x - \beta_k)^{n_k}$$

という形に書ける。 m_i と l_i の大小関係はわからないが、正整数 n を十分大きくとれば（例えば $n = \max\{m_1, \dots, m_j\}$ ）、

$$\forall i : 1 \leq i \leq k, m_i \leq nl_i$$

が成り立つ。このとき、 $f(x) | g(x)^n$ となる。

$$\forall a \in \mathbb{C} : f(a) = 0, g(a) = 0$$

は、 $f(a) = 0$ という付帯条件をみたす複素数 a に限っては、必ず $g(a) = 0$ が成り立つ、という意味である。したがって

$$\forall a \in \mathbb{C} (f(a) = 0 \implies g(a) = 0)$$

と書くこともできる。一般に

$$(\forall x \in X : p(x), q(x)) = (\forall x \in X, (p(x) \implies q(x))).$$

これを用いて、小テスト定理2の条件を「:」を使わずに書き直すことができる。上のことは次のように説明できる。 \forall は、「かつ」すなわち \wedge を結んだものであることは前回すでに説明した。つまり、

$$\begin{aligned} (\forall x \in X, (p(x) \implies q(x))) &= \bigwedge_{x \in X} (p(x) \implies q(x)) \\ &= \bigwedge_{x \in X} (\overline{p(x)} \vee q(x)) \\ &= \left(\bigwedge_{\substack{x \in X \\ p(x)}} (\overline{p(x)} \vee q(x)) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{x \in X \\ \overline{p(x)}}} (\overline{p(x)} \vee q(x)) \right) \\ &= \left(\bigwedge_{\substack{x \in X \\ p(x)}} q(x) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{x \in X \\ \overline{p(x)}}} T \right) \\ &= \left(\bigwedge_{\substack{x \in X \\ p(x)}} q(x) \right) \wedge T \\ &= \left(\bigwedge_{\substack{x \in X \\ p(x)}} q(x) \right) \\ &= \forall x \in X : p(x), q(x). \end{aligned}$$

ここで、3行目の変形は、次の例をイメージするとよい。

人間の背丈は 3m を超えない

を書き換えるために、「 x さん (人間) の背丈は 3m 未満である」という x に関する条件を $p(x)$ で表すと、

$$\bigwedge_{x:\text{人間}} p(x) = \left(\bigwedge_{\substack{x:\text{人間} \\ x:\text{男}}} p(x) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{x:\text{人間} \\ x:\text{女}}} p(x) \right)$$

と書ける。つまり、付帯条件によって \wedge をグループ分けすることができるのである。

集合論

集合論の教科書でよくある演習問題： $A \cup B = B \iff A \subset B$ は次のようにして証明できる。

$$\begin{aligned}(A \cup B = B) &= \left((p(x) \vee q(x)) \iff q(x) \right) \\ &= \left((p(x) \vee q(x)) \implies q(x) \right) \wedge \left((p(x) \vee q(x)) \longleftarrow q(x) \right) \\ &= \left(\overline{(p(x) \vee q(x)) \vee q(x)} \right) \wedge \left((p(x) \vee q(x)) \vee \overline{q(x)} \right) \\ &= \left(\overline{(p(x) \wedge q(x)) \vee q(x)} \right) \wedge \left(p(x) \vee (q(x) \vee \overline{q(x)}) \right) \\ &= \left(\overline{(p(x) \wedge q(x))} \vee q(x) \right) \\ &= \left(\overline{p(x)} \vee q(x) \right) \wedge \left(\overline{q(x)} \vee q(x) \right) \\ &= \left(\overline{p(x)} \vee q(x) \right) \\ &= \left(p(x) \implies q(x) \right) \\ &= (A \subset B).\end{aligned}$$

次が成立する。

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times B &= \bigcap_{i \in I} (A_i \times B) \\ \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B &= \bigcup_{i \in I} (A_i \times B)\end{aligned}$$

これらを証明するために、一般化された分配法則を用いる。

$$p \vee (\forall i, q_i) = \forall i, (p \vee q_i), \tag{1}$$

$$p \wedge (\exists i, q_i) = \exists i, (p \wedge q_i) \tag{2}$$

実際、

$$\begin{aligned}(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times B &\iff \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right) \wedge (y \in B) \\ &\iff (\forall i \in I, x \in A_i) \wedge (y \in B) \\ &\iff \forall i \in I, ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) \quad ((1) \text{ より}) \\ &\iff \forall i \in I, (x, y) \in A_i \times B \\ &\iff (x, y) \in \bigcap_{i \in I} (A_i \times B),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times B &\iff \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \wedge (y \in B) \\
&\iff (\exists i \in I, x \in A_i) \wedge (y \in B) \\
&\iff \exists i \in I, ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) \quad ((2) \text{ より}) \\
&\iff \exists i \in I, (x, y) \in A_i \times B \\
&\iff (x, y) \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times B),
\end{aligned}$$

もっと一般に、

$$\bigcap_{i \in I} \left(\prod_{j \in J} A_{i,j} \right) = \prod_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{i,j} \right)$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned}
(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{i,j} \right) &\iff \forall j \in J, x_j \in \bigcap_{i \in I} A_{i,j} \\
&\iff \forall j \in J, (\forall i \in I, x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall (i, j) \in I \times J, x_j \in A_{i,j} \\
&\iff \forall i \in I, (\forall j \in J, x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall i \in I, (x_j)_{j \in J} \in \prod_{i \in I} A_{i,j} \\
&\iff (x_j)_{j \in J} \in \bigcap_{i \in I} \left(\prod_{j \in J} A_{i,j} \right).
\end{aligned}$$

集合 A のべき集合 2^A とは、 A の部分集合全体からなる集合とする。

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}$$

例えば、 $A = \{1, 2, 3\}$ のとき、

$$2^A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

である。 $\{1, 2\} \subset A$, $\{1, 2\} \in 2^A$, $\{\{1, 2\}\} \subset 2^A$, $\{\{1\}, \{2\}\} \subset 2^A$ は真であるが $\{1, 2\} \subset 2^A$ は偽である。