2012年4月24日配布
2012年5月1日提出
2012年5月8日返却

1. $f : A \to B$ を写像とし、$Y \subset B$ とするとき、

$$f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} Y_j\big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j)$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\big(\bigcup_{j\in J} Y_j\big) &\iff \boxed{f(a) \in \bigcup_{j\in J} Y_j} \\ &\iff \boxed{\exists j \in J,\ f(a) \in Y_j} \\ &\iff \boxed{\exists j \in J,\ a \in f^{-1}(Y_j)} \\ &\iff a \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Y_j). \end{aligned}$$

2. $f : A \to B$ を写像とし、$Y \subset B$ とするとき、

$$f(f^{-1}(Y)) = f(A) \cap Y$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} b \in f(f^{-1}(Y)) &\iff \exists a \in A,\ \boxed{\Big((a \in f^{-1}(Y)) \wedge (b = f(a))\Big)} \\ &\iff \boxed{\exists a,\ \Big(\big(a \in A\big) \wedge \big(f(a) \in Y\big) \wedge \big(b = f(a)\big)\Big)} \\ &\iff \boxed{\exists a,\ \Big(\big(a \in A\big) \wedge \big(b \in Y\big) \wedge \big(b = f(a)\big)\Big)} \\ &\iff \boxed{\exists a,\ \Big((a \in A) \wedge (b = f(a)) \wedge (b \in Y)\Big)} \\ &\iff \boxed{\Big(b \in \{f(a) \mid a \in A\}\Big) \wedge (b \in Y)} \\ &\iff b \in f(A) \cap Y. \end{aligned}$$

3. $f : A \to B$, $g : B \to C$ を写像とし、$g \circ f$ は単射とするとき、f も単射であることを証明せよ。

$\forall a \in A, \forall a' \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} f(a) = f(a') &\implies g(f(a)) = g(f(a')) \\ &\iff \boxed{(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')} \\ &\implies \boxed{a = a'} \end{aligned}$$