2012 年 5 月 1 日配布
2012 年 5 月 8 日提出
2012 年 5 月 22 日返却

1. r を正の整数とし、$A_1, \ldots, A_r$ を有限集合 X の部分集合とする。不等式

$$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| \leq \sum_{i=1}^{r} |A_i|.$$

を r に関する帰納法により示せ。また、等号が成立するための必要十分条件を記述せよ。ただし、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1}$$

は自由に用いて良い。

$r = 1$ のときは自明。$r \geq 2$ として、$r - 1$ で正しいとすると

$$|\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| \leq \sum_{i=1}^{r-1} |A_i|. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| &= |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cup A_r| \\
&= |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| && ((1)\text{ より}) \\
&\leq |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| && (3) \\
&\leq \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| + |A_r| && ((2)\text{ より}) \quad (4) \\
&= \sum_{i=1}^{r} |A_i|.
\end{aligned}$$

次に、等号成立の必要十分条件は

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, r\},\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \tag{5}$$

であることを帰納法により示す。$r = 1$ のときは等号は常に成り立ち、(5) は仮定が F なので常に T である。

$r - 1$ のときに正しいと仮定する、すなわち、

$$|\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| = \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| \iff (\forall i, j \in \{1, \ldots, r-1\},\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset) \tag{6}$$

と仮定する。すると、

$$\begin{aligned}|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| &\iff (3)\ \text{と}\ (4)\ \text{で等号成立} \\ &\iff |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| = 0\ \text{かつ}\ |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| = \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| \qquad (7)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}|(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| = 0 &\iff (\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r = \emptyset \\ &\iff \bigcup_{i=1}^{r-1} (A_i \cap A_r) = \emptyset \\ &\iff \forall i \in \{1, \ldots, r-1\},\ A_i \cap A_r = \emptyset \qquad (8)\end{aligned}$$

(7) に (6), (8) を代入して

$$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| \iff (\forall i, j \in \{1, \ldots, r\},\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset)$$

を得る。

2. A, B を有限集合とし、$f : A \to B$ を単射とする。このとき、前問、および

$$f(A) \subset B, \qquad (9)$$

$$f(A) = \bigcup_{a \in A} \{f(a)\}, \qquad (10)$$

を用いて $|A| \leq |B|$ となることを証明せよ。

仮定より f は単射だから、

$$a, a' \in A,\ a \neq a' \implies f(a) \neq f(a').$$

すると前問の等号成立条件より

$$|\bigcup_{a \in A} \{f(a)\}| = \sum_{a \in A} |\{f(a)\}|. \qquad (11)$$

よって

$$\begin{aligned}|B| &\geq |f(A)| && ((9)\ \text{より}) \\ &= |\bigcup_{a \in A} \{f(a)\}| && ((10)\ \text{より}) \\ &= \sum_{a \in A} |\{f(a)\}| && ((11)\ \text{より}) \\ &= \sum_{a \in A} 1 \\ &= |A|.\end{aligned}$$