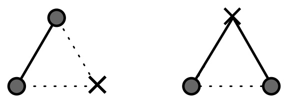
2012年5月8日

写像 $f : A \to \{T, F\}$ は、A の部分集合を定めているとも考えられる。

$$\{a \in A \mid f(a) = T\}.$$

例えば、互いに知人である男３人と、彼ら３人の彼女３人からなる６人の集合を考えると、（1）も（2）も両方成り立つ（彼女ら３人が互いに知人でないとして）。どんな n 人 $(n \geq 6)$ のグループでも、（1）または（2）の少なくとも一方は必ず成り立つことを示す。

知人であるかどうかは、$f : \binom{X}{2} \to \{T, F\}$ という写像で記述できる。または、$R \subset \binom{X}{2}$ で記述することもできる。知人であるかどうかが一方通行の場合は $R \subset X^2$ を考える必要がある。



$$\begin{aligned}
2|G| &= \sum_{T \in G} 2 \\
&= \sum_{T \in G} |\{x \mid x \in T,\ \overset{\alpha(T-\{x\},x)}{\boxed{T - \{x\} \text{ は } x \text{ の知人と } x \text{ の知人でない人からなる}}}\}| \\
&= |\{(x, T) \mid (x, T) \in X \times G,\ x \in T,\ \alpha(T - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{T \mid T \in S,\ x \in T,\ \alpha(T - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{T \mid T \in \tbinom{X}{3},\ x \in T,\ \alpha(T - \{x\}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{P \mid P \in \tbinom{X - \{x\}}{2},\ \alpha(P, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{x \text{ の知人}\} \times \{x \text{ と知人でない人}\}| \\
&= \sum_{x \in X} r_x(n - 1 - r_x) \\
&= -\sum_{x \in X} (r_x^2 - (n-1) r_x) \\
&= -\sum_{x \in X} \left((r_x - \tfrac{n-1}{2})^2 - \tfrac{(n-1)^2}{4} \right) \\
&\leq \begin{cases} n\frac{(n-1)^2}{4} & n : \mathrm{odd} \\ n\frac{n(n-2)}{4} & n : \mathrm{even} \end{cases}
\end{aligned}$$

特に、$n=6$ のとき、

$$|G| \leq 6\frac{6^2-2\cdot 6}{8} = 18 < 20 = \binom{6}{3}$$

$n=5$ のとき、$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ として、$(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_5,x_1)$ が知人で、その他は知人でないとすると、

(1) X の中に、互いに知人どうしの 3 人は存在しない。

(2) X の中に、互いに知人でない 3 人は存在しない。