

2012年5月8日配布  
2012年5月22日提出  
2012年5月29日返却

1.  $\mathbb{Z}$  上の以下の関係  $R$  が次の性質を持つかどうか決定せよ。

$R$	反射律	対称律	推移律
$\{(a, b) \mid a \geq b\}$	○	×	○
$\{(a, b) \mid a - b \text{ は偶数}\}$	○	○	○
$\{(a, b) \mid ab \text{ は奇数}\}$	×	○	○
$\{(a, b) \mid ab = 1\}$	×	○	○
$\{(a, b) \mid \sqrt{ab} \text{ は整数}\}$	○	○	×

2.

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X, ad = bc\}$$

とおくと、 $R$  は  $X$  上の同値関係になることを示せ。

$(a, b) \in X$  とすると、 $ab = ba$  より  $((a, b), (a, b)) \in R$ 、よって反射律が成り立つ。

$((a, b), (c, d)) \in R$  とすると  $ad = bc$  より  $cb = da$  だから  $((c, d), (a, b)) \in R$ 、よって対称律が成り立つ。

$((a, b), (c, d)) \in R, ((c, d), (e, f)) \in R$  とすると  $ad = bc, cf = de$  だから

$$\begin{aligned}(ad)f &= (bc)f \\ &= b(cf) \\ &= b(de)\end{aligned}$$

となる。 $(c, d) \in X$  より  $d \neq 0$  であるから、 $af = be$  を得るので、 $((a, b), (e, f)) \in R$ 、よって推移律が成り立つ。