2012年5月22日

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{y\in X\\ y\le x}} \mu(y,x)g(y) &= \sum_{\substack{y\in X\\ y\le x}} \mu(y,x)\sum_{\substack{z\in X\\ z\le y}} f(z) \\
&= \sum_{y\in X} \mu(y,x)\sum_{z\in X} \zeta(z,y)f(z) \\
&= \sum_{z\in X}\left(\sum_{y\in X}\zeta(z,y)\mu(y,x)\right)f(z) \\
&= \sum_{z\in X}(\zeta\mu)_{z,x}f(z) \\
&= \sum_{z\in X}\delta_{z,x}f(z) \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

もっと簡単に、g,f を行ベクトル、μ,ζ を行列と考えて行列とベクトルの積を用いれば $\mu\zeta=$ 単位行列であることから $\zeta\mu=$ 単位行列となり、したがって $g=f\zeta \implies f=g\zeta^{-1}=g\mu.$

$$
\begin{aligned}
g(J) &= \sum_{\substack{K\in 2^I\\ K\subset J}} f(K) \\
&= \Bigl|\bigcup_{\substack{K\in 2^I\\ K\subset J}}\bigl\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}=K\bigr\}\Bigr| \qquad \text{(disjoint だから)} \\
&= \Bigl|\bigl\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}\subset J\bigr\}\Bigr| \\
&= \Bigl|\bigl\{a \mid a\in X,\ \overline{J}\subset\{j\in I \mid a\in A_j\}\bigr\}\Bigr| \\
&= \Bigl|\bigl\{a \mid a\in X,\ \forall j\in\overline{J},\ a\in A_j\bigr\}\Bigr| \\
&= \Bigl|\bigcap_{j\in\overline{J}} A_j\Bigr|.
\end{aligned}
$$

ただし、この計算は $J=I$ のとき注意を要する。$J=I$ のとき

$$\bigl\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}\subset J\bigr\}=\bigl\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}\subset I\bigr\}$$

で

$$\{j\in I \mid a\notin A_j\}\subset I$$

は常に真だから、

$$\bigl\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}\subset J\bigr\}=X.$$

よって $g(I)=g(J)=|X|$ となる。