2012年5月22日配布
2012年5月29日提出
2012年6月5日返却

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ を正整数の集合とし、$R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ a \text{ は } b \text{ の約数}\}$$

とおく。R は順序関係になることを示せ。

また、$p_1, \dots, p_n$ を相異なる素数とし、それらの積 $p_1 \cdots p_n$ を q とおくとき、$\mu(q) = (-1)^n$ となることを、n に関する帰納法により示せ。

$a \in \mathbb{N}$ に対して、a は a の約数だから $(a, a) \in R$, よって反射律が成り立つ。

$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ とすると $b = ax$, $c = by$ となる $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき $c = axy$ となるので $(a, c) \in R$, よって推移律が成り立つ。

$(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ とすると $b = ax$, $a = by$ となる $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき $a = axy$ となるので $xy = 1$ である。これは $x = y = 1$ を意味するので $a = b$, よって反対称律が成り立つ。

n に関する帰納法により $\mu(p_1 \cdots p_n) = (-1)^n$ を示す。$n = 1$ のとき、$\mu(p_1) = -\mu(1) = -1 = (-1)^1$ だから成り立つ。

$n > 1$ とし、$n - 1$ 以下のとき成り立つとする。q の q 以外の約数は $p_1, \dots, p_n$ から $n - 1$ 個以下の元を選んで積を作ったものだから、

$$\begin{aligned}
\mu(q) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mu(p_{i_1} \cdots p_{i_k}) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (-1)^k && \text{(帰納法の仮定より)} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k + (-1)^n \\
&= -(1 + (-1))^n + (-1)^n \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$