2012年5月29日

集合の包含関係に関する Möbius 関数

有限集合 I のべき集合 2^I に、包含関係に関して順序関係 R を定義する。

$$R = \{(B,C) \in 2^I \times 2^I \mid B \subset C\}.$$

このときの Möbius 関数を $\mu : 2^I \times 2^I \to \mathbb{Z}$ で表すと、$B \subset C$ のとき

$$\mu(B,C) = (-1)^{|C|-|B|}$$

となることを、$k = |C| - |B|$ に関する帰納法で示す。$k = 0$ のときは明らか。$k = n-1$ までで正しいとし、$|C| - |B| = n$ とすると

$$\begin{aligned}
\mu(B,C) &= -\sum_{\substack{D \in 2^I \\ B \subset D \subsetneqq C}} \mu(B,D) && (\mu \text{ の定義より}) \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{D \in 2^I \\ B \subset D \subsetneqq C \\ |D|-|B|=j}} \mu(B,D) && (0 \le |D| - |B| \le |C| - |B| = n \text{ より}) \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{D \in 2^I \\ B \subset D \subsetneqq C \\ |D|-|B|=j}} (-1)^{|D|-|B|} && (\text{帰納法の仮定より}) \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} && (D \text{ の選び方は } C - B \text{ から } j \text{ 個選ぶのと同じ}) \\
&= -\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} + (-1)^n \\
&= -(1 + (-1))^n + (-1)^n && (\text{二項定理より}) \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

全射の数

有限集合の単射の数は順列の数として計算可能であったが、全射の数は複雑である。$|A| = m \geq |B| = n$ とし、$F_b = \{h \mid h : A \to B,\ b \notin h(A)\}$ とおく。包除原理：

$$\left| X - \bigcup_{i \in I} A_i \right| = \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

を適用すると

$$\begin{aligned} |\{h \mid h : A \to B,\ h \text{ は全射 }\}| &= \left| B^A - \bigcup_{b \in B} F_b \right| \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{C \in \binom{B}{i}} (-1)^i |\{h \mid h : A \to B,\ C \cap h(A) = \emptyset\}| \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^m \\ &= n! S(m,n). \end{aligned}$$

ここで、$S(m,n)$ は第２種の Stirling 数という。

定義の復習

$R \subset X \times X$ を同値関係とし、$x \in X$ とするとき、

$$[x] = \{y \mid y \in X,\ (x,y) \in R\}$$

を、（関係 R に関する、）x を含む同値類という。同値類全体の集合 $\{[x] \mid x \in X\}$ を関係 R による商集合といい、X/R と書く。R は同値関係なので、

$$(x,y) \in R \iff [x] = [y] \iff x \in [y] \iff y \in [x] \iff [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

$\mathbb{Z}$ の構成

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\}, \\ \mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{aligned}$$

とし、$\mathbb{N}_0^2 = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ 上の関係 R を次で定める。

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{N}_0^2)^2 \mid a + d = b + c\}$$

すると R は同値関係になる。R による商集合

$$\mathbb{N}_0^2/R = \{[a,b] \mid (a,b) \in \mathbb{N}_0^2\}$$

から $\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f([a,b]) = a - b$$

によって定める。f の定義は見かけ上同値類 $[a,b]$ の代表元 (a,b) の取り方に依存しているように見えるので、$[a,b]=[c,d]$ のとき $f([a,b]) = f([c,d])$ が示されないと f は写像になっていると言えない。実際、

$$[a,b]=[c,d] \implies ((a,b),(c,d)) \in R \implies a+d=b+c \implies a-b=c-d$$

なので、$f([a,b]) = f([c,d])$ が成り立つ。

このように、商集合を定義域とする写像の定義が見かけ上同値類の代表元の取り方に依存しているとき、その写像の値が実際には同値類の代表元の取り方に依存しないことを示すことを、「写像が well-defined である」ことを示す、という。上の写像 f は全単射でもある。

集合 X における二項演算 (binary operation) とは、$X \times X$ から X への写像のことである。例えば、$\mathbb{N}_0^2/R$ に演算 $+$ を次のように定義することができる。

$$+ : (\mathbb{N}_0^2/R) \times (\mathbb{N}_0^2/R) \to \mathbb{N}_0^2/R,\ +([a,b],[c,d]) = [a+c, b+d].$$

以後 $+([a,b],[c,d])$ を $[a,b]+[c,d]$ と書くことにする。この写像 $+$ は well-defined である。実際、$[a,b]=[a',b']$, $[c,d]=[c',d']$ とすると、$\alpha = a'-a = b'-b$, $\beta = c'-c = d'-d$ とおくことにより、$[a+c,b+d] = [a'+c', b'+d']$ が確かめられる。さらに、

$$f([a,b]+[c,d]) = f([a,b]) + f([c,d])$$

が成り立つ。ただし、右辺における $+$ は $\mathbb{Z}$ における通常の和である。

$\mathbb{Q}$ の構成

$$X = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a,b),(c,d)) \mid ((a,b),(c,d)) \in X \times X,\ ad = bc\}$$

とおくと、R は X 上の同値関係になる。R による商集合

$$X/R = \{[a,b] \mid (a,b) \in X\}$$

から $\mathbb{Q}$ への写像　f を

$$f([a,b]) = \frac{a}{b}$$

によって定める。f は well-defined であることがわかり、また f は全単射でもある。