

2012年5月29日配布
2012年6月5日提出
2012年6月12日返却

1.(1)

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X, ad = bc\}$$

とおくと、 R は X 上の同値関係になる。 R による商集合 X/R に演算 $+$ を次のように定義する。

$$+ : (X/R) \times (X/R) \rightarrow X/R, +([a, b], [c, d]) = [ad + bc, bd].$$

この写像 $+$ は well-defined であることを示せ。

(2) R による商集合 X/R に演算 \times を次のように定義する。

$$\times : (X/R) \times (X/R) \rightarrow X/R, \times([a, b], [c, d]) = [ac, bd].$$

この写像 \times は well-defined であることを示せ。

$[a, b] = [a', b']$, $[c, d] = [c', d']$ とすると

$$ab' = ba' \text{ and } cd' = dc'. \tag{1}$$

よって

(1)

$$\begin{aligned} (ad + bc)(b'd') &= (ad)(b'd') + (bc)(b'd') \\ &= (ab')(dd') + (bb')(cd') \\ &= (ba')(dd') + (bb')(c'd) && ((1) \text{ より}) \\ &= (a'd')(bd) + (b'c')(bd) \\ &= (a'd' + b'c')(bd) \end{aligned}$$

となるので $[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd']$.

(2)

$$\begin{aligned} [a, b] = [a', b'] \text{ and } [c, d] = [c', d'] \\ \implies ab' = ba' \text{ and } cd' = c'd \\ \implies (ab')(cd') = (ba')(c'd) \\ \implies (ac)(b'd') = (bd)(a'c') \\ \implies [ac, bd] = [a'c', b'd']. \end{aligned}$$