

2012年6月5日配布  
2012年6月12日提出  
2012年6月26日返却

1.  $m$  を正の整数とし、 $a \in \mathbb{Z}$  が  $m$  で割り切れるとき  $m|a$  と書く。

$$R = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, m|(a - b)\}$$

とおくと、 $R$  は  $\mathbb{Z}$  上の同値関係になる。 $R$  による商集合

$$\mathbb{Z}/R = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

を  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  とも書く。 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  に演算  $\times$  を次のように定義する。

$$\times : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \times([a], [b]) = [ab].$$

この写像  $\times$  は well-defined であることを示せ。

$$\begin{aligned} [a] = [a'], [b] = [b'] &\iff (a, a') \in R, (b, b') \in R \\ &\iff m|(a - a'), m|(b - b') \\ &\implies m|(a - a')b, m|a'(b - b') \\ &\implies m|((a - a')b + a'(b - b')) \\ &\iff m|(ab - a'b') \iff (ab, a'b') \in R \\ &\iff [ab] = [a'b']. \end{aligned}$$

2.  $m$  を正の偶数とし、写像  $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  を次のように定義する。

$$f([a]) = [a^2].$$

ただし、 $[a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ,  $[a^2] \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  である。この写像  $f$  は well-defined であることを示せ。

$m$  が奇数のときはどうか。

$$\begin{aligned} [a] = [a'] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\implies m|(a - a') \\ &\implies m|(a - a'), 2|(a - a') && (m \text{ は偶数だから}) \\ &\implies m|(a - a'), 2|((a - a') + 2a') \\ &\implies m|(a - a'), 2|(a + a') \\ &\implies 2m|(a - a')(a + a') \\ &\implies 2m|(a^2 - a'^2) \\ &\implies [a^2] = [a'^2] \in \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$m$  が奇数のとき、 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  において  $[0] = [m]$  だが  $m^2$  は  $2m$  で割り切れないので  $\mathbb{Z}/2m\mathbb{Z}$  において  $[0] \neq [m^2]$  である。よって  $m$  が奇数のときは well-defined とは言えず、上の写像  $f$  は定義できない。