2012年7月10日

復習

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{f\in J^I}\prod_{i=1}^{m}a_{i,f(i)}$$

ただし $I=\{1,\dots,m\}$, $J=\{1,\dots,n\}$ である。

正整数の分割

　n を正整数とするとき、正整数の列 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ が n の分割であるとは、次の条件をみたすときをいう。

(1) $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=n$,

(2) $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_k$.

例えば、4 の分割は

$$\begin{gathered}4\\3,1\\2,2\\2,1,1\\1,1,1,1\end{gathered}$$

の 5 個である。n の分割 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ に対して、

$$\alpha_i=|\{j\mid 1\leq j\leq k,\ \lambda_j=i\}|\quad(1\leq i\leq n)$$

とおくと、

$$\sum_{i=1}^{n}i\alpha_i=n \tag{*}$$

が成り立つ。逆に、非負整数の列 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ で条件 (*) をみたすものから、n の分割

$$\underbrace{n,\dots,n}_{\alpha_n},\quad \underset{\dots}{\dots,}\quad \underbrace{1,\dots,1}_{\alpha_1}$$

が得られる。したがって、$p(n)$ で n の分割の総数を表すと、

$$p(n)=|\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\mid\sum_{i=1}^{n}i\alpha_i=n\}|$$

$$= |\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1, \ldots, n\}^n \mid \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n\}|$$

$$= |\{f \in \{0, 1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,n\}} \mid \sum_{i=1}^{n} if(i) = n\}|$$

一方、形式的べき級数環 $\mathbb{R}[[x]]$ において、

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 - x) = 1$$

が成り立つ。同様に

$$(1 + x^i + x^{2i} + \cdots)(1 - x^i) = 1$$

も成り立つ。$\prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1}$ は形式的べき級数環 $\mathbb{R}[[x]]$ において意味を持ち、

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(1 - x^i)^{-1} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} x^{ij} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{ij} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \sum_{f \in \{0,1,\ldots,n\}^{\{1,\ldots,n\}}} \prod_{i=1}^{n} x^{if(i)} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \sum_{f \in \{0,1,\ldots,n\}^{\{1,\ldots,n\}}} x^{\sum_{i=1}^{n} if(i)} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= |\{f \in \{0, 1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,n\}} \mid \sum_{i=1}^{n} if(i) = n\}| \\
&= p(n).
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1}.$$

ただし、$p(0) = 1$ とする。すると、$p(n)$ の間の関係式がわかる。

$$\sum_{m=0}^{n} q_m p(n - m) = 0, \quad \text{ただし } \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i).$$

$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ の展開

$\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を求めるために、$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ を展開する。$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ における x^n の係数は $\prod_{i=1}^{n}(1-x^i)$ における x^n の係数に等しく、

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(1-x^i) &= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}(-x^i)^j \\ &= \sum_{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}}\prod_{i=1}^{n}(-x^i)^{f(i)} \\ &= \sum_{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}}(-1)^{\sum_{i=1}^{n}f(i)}x^{\sum_{i=1}^{n}if(i)} \\ &= \sum_{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}}(-1)^{|\{i|f(i)=1\}|}x^{\sum_{i=1}^{n}if(i)}\end{aligned}$$

における x^n の係数 q_n は

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}\\ \sum_{i=1}^{n}if(i)=n}}(-1)^{|\{i|f(i)=1\}|} \\ &= \sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}\\ \sum_{i=1}^{n}if(i)=n\\ |\{i|f(i)=1\}|\text{ は偶数}}}1+\sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\}\\ \sum_{i=1}^{n}if(i)=n\\ |\{i|f(i)=1\}|\text{ は奇数}}}(-1) \\ &= \left|\left\{f \mid f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{n}if(i)=n,\ |\{i\mid f(i)=1\}|\text{ は偶数}\right\}\right| \\ &\quad -\left|\left\{f \mid f:\{1,\dots,n\}\to\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{n}if(i)=n,\ |\{i\mid f(i)=1\}|\text{ は奇数}\right\}\right|\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}E_n &= \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{Z}^k \mid \lambda_1>\dots>\lambda_k>0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=n,\ k\text{ は偶数}\right\}, \\ O_n &= \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{Z}^k \mid \lambda_1>\dots>\lambda_k>0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=n,\ k\text{ は奇数}\right\}\end{aligned}$$

とおくと

$$q_n=|E_n|-|O_n|.$$